



TOBB
EKONOMİ VE TEKNOLOJİ
ÜNİVERSİTESİ

MATEMATİK BÖLÜMÜ
MAT 101 - MATEMATİK I DERSİ
ÇALIŞMA SORULARI

Bölüm 1: Fonksiyonlar

1.1 Tanım Kümesi

1) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ fonksiyonu verilsin. Tanım kümesini bulunuz. $((0, \infty) \setminus \{1\})$

Bölüm 2: Limit ve Süreklilik

2.. Limit

L'Hospital kuralını kullanmadan aşağıdaki limitleri hesaplayınız:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(119x)}{x+1-\cos x} = ?$ (119)

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|2x-3|-|x-3|}{x} = ?$ (-1)

3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{e^x} = ?$ (0)

4) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3-27}{x^2-9} = ?$ ($\frac{9}{2}$)

5) $L = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \sqrt{\frac{1}{x^2} + 2} \right)$ ifadesinin limitini hesaplayınız. cevap:(limit mevcut değil.)

6) $L = \lim_{x \rightarrow \infty} \sin x \cdot \sin \frac{1}{x}$ ifadesinin limitini hesaplayınız. cevap:(0)

7) $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x^3) + 2 \tan^3 x}{x^2 \tan x + x^3}$ limitini hesaplayınız. cevap: $\left(\frac{3}{2}\right)$

8) $f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+5} - 3}{\sqrt{x} - 2}$ ifadesini hesaplayınız. cevap: $\left(\frac{2}{3}\right)$

9) $f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 5x}{x - x^2}$ ifadesini hesaplayınız. cevap:(6)

2.. Süreklilik

- 1) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2 x}{x^2 - x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$ şeklinde verilen $f(x)$ fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz. $f(x)$ fonksiyonunun $x = 0$ noktasındaki sürekli olduğu a değerini bulunuz. ($a = 0$) Ayrıca $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = ?$ ($-\infty$)
- 2) $f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ x^2 \cdot \sin x, & x \neq 0 \end{cases}$ olmak üzere f fonksiyonu $x = 0$ da sürekli midir? cevap:(sürekli)dir
- 3) $g(x) = x\sqrt{|x|}$ fonksiyonu $x = 0$ 'da sürekli midir? cevap:(sürekli)dir $g'(0) = 0$)
- 4) $f(x) = \begin{cases} e^x(x^2 + a) & \text{if } x > 0 \\ 1 & \text{if } x = 0 \\ bx^2 + 1 & \text{if } x < 0 \end{cases}$ ise $f(x)$ 'i her yerde sürekli yapacak a ve b ' yi bulunuz. Cevap:
 $a = b = 1$

Bölüm 3: Türev

3... Teğet ve Normal Denklemler

- 1) $2x^2 - 3xy + x^3y^2 = 6$ eğrisine $P_0(-1, 1)$ noktasında teğet doğrusunu bulunuz. ($y = 2x - 3$)
- 2) $f(x) = 2 \sin x - \sin^2 x$ fonksiyonunu ve $I = (-\pi, 2\pi)$ aralığını düşünelim. I aralığında yatay teğete sahip olan noktaları bulunuz. ($x = \frac{\pi}{2}$)

3... Türev

- 1) $f(x) = \sqrt{2x + \frac{1}{x}} \Rightarrow \frac{d^2 f}{dx^2}(1) = ?$ ($\frac{11}{12\sqrt{3}}$)
- 2) $\frac{d}{dx}(\tan(\frac{\cos x}{x})) = ?$
- 3) $\frac{d}{dx}(x^{\sin x} + (\ln(x^{\sqrt{x}}))) = ?$
- 4) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \leq 1 \\ ax^2 + b, & x > 1 \end{cases}$ olarak tanımlanan fonksiyon $x = 1$ de türevlenebildiğine göre a ve b noktalarını bulunuz. ($a = \frac{1}{4}, b = \frac{3}{4}$)
- 5) $\frac{d}{dx} \left[\sec^2 \left(\frac{x}{x+1} \right) \right] = ?$ cevap: $\left(\sec^2 \left(\frac{x}{x+1} \right) \cdot \tan \left(\frac{x}{x+1} \right) \cdot \left[\frac{1}{x+1} \right] \right)$
- 6) $y = x^{2x^{\sin x}}$ olmak üzere $\frac{dy}{dx} = ?$ cevap: $\left(\frac{dy}{dx} = x^{2x^{\sin x}} \cdot (2x)^{\sin x} \cdot \ln x \cdot (\cos x \cdot \ln(2x) + \frac{\sin x}{x} + \frac{1}{x \cdot \ln x}) \right)$
- 7) $y = \arctan^4(x^{119})$ ise $\frac{dy}{dx} = ?$
- 8) $f(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{4}, & x \leq 1 \\ ax + b, & x > 1 \end{cases}$ olmak üzere
- a) $f(x)$ sürekli olacak biçimde a ve b sayıları mevcut mudur?

b) $f(x)$ fonksiyonun türevlenebilir olması için a ve b sayıları ne olmalıdır?

9) $f(x) = a^{2x}$ olmak üzere f' fonksiyonunu bulunuz.

10) $f(x) = y, f(1) = 2$ ve $x \sin(2xy^2 - y^3) - x^2 + 1 = 0$ verilmiştir. $f'(1)$ ' i bulunuz. Cevap: $\frac{3}{2}$

11) $y = \arcsin(\sec^2(e^2x))$ verilmiştir. $\frac{dy}{dx}$ ' i bulunuz.

3.6 Kapalı Fonksiyonların Türevi

1) Verilen kapalı fonksiyonlar için y' yü bulunuz.

a) $x^3 + x^2y - 2xy^2 + y^3 = 1$

b) $x \sin(xy) + \cos(xy) = 0$

c) $x + y^2 = \sin(xy)$

d) $x\sqrt{x+y} = 2xy^2$

e) $\sin(xy) = \cos(y^2)$

2) Aşağıda belirtilen değerleri bulunuz.

a) $x^5 - xy + y^3 = 8$ ise $y'(0) = ?$

b) $x^2 = \sin^2(xy) + xy - \frac{1}{2}$ ise $y'(\frac{\sqrt{\pi}}{2}, \frac{\sqrt{\pi}}{2}) = ?$

c) $x^2 = \sin^2(xy) + xy - \frac{1}{2}$ ise $y'(\frac{\sqrt{\pi}}{2}, \frac{\sqrt{\pi}}{2}) = ?$

3) Aşağıdaki eğriler için belirtilen noktadan geçen teğet ve normal doğruların denklemini yazınız.

a) $x^3 + x^2y - 2xy^2 + y^3 = 1, p(1, 0)$

b) $\sin(xy) + y = x^2, p(1, 0)$

c) $e^{xy} + y^2 \sin(\pi x) - e = 0, p(1, 1)$

d) $x^2 - y \sin(x + y) = 1, p(1, -1)$

3.7 Ters Fonksiyonun ve Logaritma Fonksiyonun Türevleri

1) $f(x) = x^5 + x^3 + x + 1$ ise f^{-1} in $x = 2$ noktasındaki eğimini hesaplayınız. cevap: $(\frac{1}{3})$

2) $f(x) = x^3 + x + 1$ olsun.

a) $f(x)$ ' in birebir olduğunu gösteriniz.

b) $g = f^{-1}$ ise $g'(3) = ?$

3) $f(x) = x^2 - 4x - 5$ olsun.

a) $x > 2$ için $f(x)$ in birebir olduğunu gösteriniz.

b) $\frac{df^{-1}}{dx} |_{x=f(5)=0} = ?$

4) Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini logaritmik türev yardımıyla bulunuz.

a) $(1+x)^{\frac{2}{3}}(2-x)^{\frac{1}{3}}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}(1+\ln x)^{\frac{1}{2}}$

b) $y = \frac{x^{\frac{7}{4}}\sqrt{x^3+1}}{(3x+5)^5}$

c) $y = x^{\sqrt{x+1}}$

d) $y = \frac{\sin^2(x)\tan^4(x)}{(x^3+1)^4}$

e) $y = \sqrt[4]{\frac{x^2+1}{x^2-1}}$

5) Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini bulunuz

a) $\ln\left(\frac{x+1}{\sqrt{x-2}}\right)$

b) $\log_{10}\left(\frac{x}{x-1}\right)$

c) $\frac{1+\ln x}{1-\ln x}$

3.8 Ters Trigonometrik Fonksiyonlar

1) $f(x) = \sin(\arcsin(x+1)) = ?$ ise $f'(x) = ?$

2) $f(x) = \arcsin(\sin \sqrt{x^2+a}) = ?$ ise $f'(x) = ?$

3) $f(x) = \arccos(\tan \sqrt{x^2+1}) = ?$ ise $f'(x) = ?$

4) $f(x) = \frac{\operatorname{arcsec}(x^2+1)}{\tan(2x+1)} = ?$ ise $f'(x) = ?$

5) $f(x) = \frac{1}{\arcsin(x)} = ?$ ise $f'(x) = ?$

6) $f(x) = 2 \arctan\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) + \arccos(x)$ ise $f'(x) = ?$ $x \in (0,1)$

7) $f(x) = x \arctan(\sqrt{x})$ ise $f'(x) = ?$

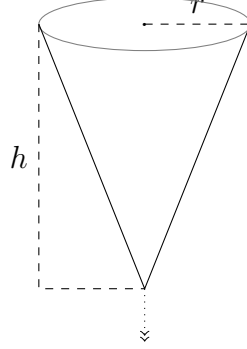
3.9 Bağlı Oranlar

1) Bir böcek $t = 0$ anında düz bir yolda $3ft/dk$ hızla kuzeye doğru yürümeye başlamıştır. $2dk$ sonra, ikinci böcek aynı yerden doğuya doğru $5ft/dk$ hızla yürümeye başlamıştır. Birinci böcek $12ft$ yol aldığı anda, iki böcek arasındaki uzaklığın değişme hızı nedir? $\left(\frac{43}{\sqrt{61}}\right)$

2) Bir çemberin yarıçapı $2cm/s$ sabit hızla büyüyor. Çevre uzunluğu $200\pi cm$ olduğunda, çemberin alanındaki değişim hızı nedir?

3) İki araba aynı noktadan hareket ediyor. Biri $60km$ hızla güneye, diğeri $20km/sa$ hızla batıya doğru gidiyor. 2 saat sonra arabalar arasındaki uzaklığın artış hızı ne olur?

- 4) Bir üçgenin alanı $2cm^2/da$ oranında artarken yüksekliği $1cm/da$ oranında artıyor. Üçgenin yüksekliği $10cm$ ve alanı $100cm^2$ olduğunda tabanın değişim hızı nedir?
- 5) $1km$ yükseklikte ve $500km/sa$ hızla yatay olarak uçan bir uçak, bir radar istasyonu üzerinden geçiyor. Uçak istasyondan $2km$ uzakta olduğunda uçaktan istasyona olan uzaklığın artış hızı ne olur?
- 6) Şekildeki depo başlangıçta su ile doludur.



$r = 5m$ ve $h = 10m$ dir. Suyun yüksekliği l olduğunda, depodan $l^2 m^2/sn$ oranında su sızmaktadır.

- a) Su yüksekliği $8m$ olduğunda su yüksekliğindeki değişim hızını bulunuz.
- b) Su yüksekliğinin $6m$ nin altına düşmemesi için, depoya sabit hızla su eklenecektir. Bu hız en az ne olmalıdır.

* Hacim: $V(t) = \frac{1}{3}\pi r^2(t)l(t)$

3.10 Doğrusal Yaklaşımlar ve Diferansiyeller

- 1) $f(x) = x^2 + 2e^{2(x-1)}$ ise fonksiyonun $x = 1$ deki doğrusal yaklaşımını bulunuz. Hangi x değerleri için hata 0.01 den küçük olur?
- 2) $f(x) = \frac{1}{x-1}$ olsun
 - a) $x = 3$ de $f(x)$ in doğrusal yaklaşımını bulunuz. ($L(x) = ?$)
 - b) $L(x)$ ' i kullanarak $(3 - h, 3 + h)$ aralığında $f(x)$ fonksiyonu yaklaşık olarak hesaplanırsa hatanın 0.001 den küçük olması için h en fazla kaç olabilir.
- 3) $f(x) = \frac{x^4}{2} - 3x^2 + 5$ olsun.
 - a) $x = 1$ de $f(x)$ fonksiyonunun doğrusal yaklaşımını bulunuz. ($L(x) = ?$)
 - b) Hata fonksiyonunu bulunuz ($|f(x) - L(x)|$)
 - c) $x \in [1 - h, 1 + h]$ olduğunda hata $\leq \frac{1}{100}$ ise h en fazla kaç olabilir.
- 4) $f(x) = x^3 + 2x - \frac{2}{\pi} \cos(\frac{x\pi}{2})$ olsun. dx ve dy diferansiyellerini kullanarak $f(1.02)$ değerini bulunuz.
- 5) Doğrusal yaklaşım kullanarak aşağıdaki ifadeleri yaklaşık olarak bulun.
 - a) $\sqrt{10}$
 - b) $\sin(\frac{1}{10})$
 - c) $\sqrt{4.01}$
 - d) $\sqrt[3]{26}$

6) $ye^x + xe^y + y = x + 2$ ise $f(0.01)$ i doğrusal yaklaşım kullanarak yaklaşık olarak hesaplayınız.

Bölüm 4: Türevin Uygulamaları

4.1 Fonksiyonların Ekstremum Değerleri

- 1) $f(x) = 3x^4 + 40x^2 + 1$ eğrisinin minimum noktasını açıklayarak bulunuz.
- 2) $f(x) = 2x^3 - 6x + 6$ ise yerel maksimum veya minimum değerlerini bulunuz.
- 3) $f(x) = 3x^4 - 4x^3$ ise yerel maksimum veya minimum değerlerini bulunuz.
- 4) $f(x) = |x^2 - 1|$ ise yerel maksimum veya minimum değerlerini bulunuz.
- 5) $f(x) = x - 2\sqrt{x}$ ise yerel maksimum veya minimum değerlerini bulunuz.
- 6) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - x}$ ise yerel maksimum veya minimum değerlerini bulunuz.
- 7) $f(x) = x \ln x$ ise yerel maksimum veya minimum değerlerini bulunuz.
- 8) $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$, $x \in [0, \frac{\pi}{3}]$ ise yerel maksimum veya minimum değerlerini bulunuz.
- 9) $f(x) = xe^{-x}$, $x \in [0, 2]$ ise yerel maksimum ve minimum değerlerini bulunuz.
- 10) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x \in [1, 3]$ ise yerel maksimum ve minimum değerlerini bulunuz.
- 11) $f(x)$ fonksiyonu $[0, 1]$ aralığında *sürekli* olmak üzere,
 - i) $f(0) = 0$
 - ii) $2 < f'(x)$, eğer $(0, \frac{1}{2})$ ise
 - iii) $-2 < f'(x) < 0$, eğer $(\frac{1}{2}, 1)$ iseolarak veriliyor. Bu durumda
 - a) $f(\frac{1}{2}) > 1$ olduğunu gösteriniz;
 - b) ...

4.2 Ortalama Değer Teoremi ve Rolle Teoremi

- 1) $P(x) = 10x^4 - 5x - 4$ denkleminin kaç reel kökü vardır?
- 2) $f(x) = x^7 + x^5 + x + 1 = 0$ denkleminin sadece bir reel çözümü olduğunu gösteriniz.
- 3) Aşağıdaki fonksiyonlar için Ortalama Değer Teoremini sağlayan “c” noktasını bulunuz.
 - a) $f(x) = x^2 + x$, $x \in [0, 1]$
 - b) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2$, $x \in [0, 3]$
- 4) $2x^2 + x^4 - 3 = 0$ denkleminin kaç reel kökü vardır?
- 5) $x^5 + x - 1$ in sadece bir kökü olduğunu gösteriniz.

- 6) $f(x) = \frac{x}{(1+x)^2}$ fonksiyonu $[0, 10]$ aralığında tanımlansın. Ortalam Değer Teoremini sağlayan kaç farklı “ c ” değeri vardır?(“ c ” değerlerinin bulmanıza gerek yoktur.)
- 7) $f(x) = x^3 + 2x - \frac{2}{\pi} \cos(\frac{\pi x}{2}) = 0$ denkleminin sadece bir reel kökü olduğunu gösteriniz.
- 8) $f(x) = x^5 + 15x - 1$ fonksiyonunun sadece bir reel kökü olduğunu gösteriniz.
- 9) $f(x) = \sin(x) + \cos(x) - 3x + 5 = 0$ denkleminin en az bir kökü olduğunu gösteriniz. Toplam kaç kök vardır?

4.3 Monoton Fonksiyonlar ve Birinci Türev Testi

- 1) $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 4x + 1$ fonksiyonunun artan olduğu aralıkları bulunuz.
- 2) $f(x) = x^2(x - 1)$ fonksiyonunun artan veya azalan olduğu aralıkları bulunuz.
- 3) $f(x) = |x^2 - 4|$ fonksiyonunun artan veya azalan olduğu aralıkları bulunuz.
- 4) $f(x) = \sin x$ fonksiyonunun artan veya azalan olduğu aralıkları bulunuz.
- 5) $f(x) = 7x^3 - 3x^7$ fonksiyonunun artan veya azalan olduğu aralıkları bulunuz.
- 6) $f(x) = x\sqrt{5 - x}$ fonksiyonunun artan veya azalan olduğu aralıkları bulunuz.
- 7) $f(x) = 2 \cos x + \sin^2 x$, $x \in [-\pi, \pi]$ fonksiyonunun artan veya azalan olduğu aralıkları bulunuz.
- 8) $f(x) = \ln(1 + x^2)$ fonksiyonunun artan veya azalan olduğu aralıkları bulunuz.

4.4 Simetri, Asimtot ve Grafik Çizimleri

- 1) $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ ise fonksiyonun
- (a) Tanım aralığını bulunuz.
- (b) $x = 0$ noktasında asimtotunun mevcut olup olmadığına bakınız
- (c) Artan ve azalan aralıklarını belirleyiniz.

Aşağıdaki fonksiyonların grafiklerini çiziniz. Eğer varsa asimtotlarını belirtiniz.

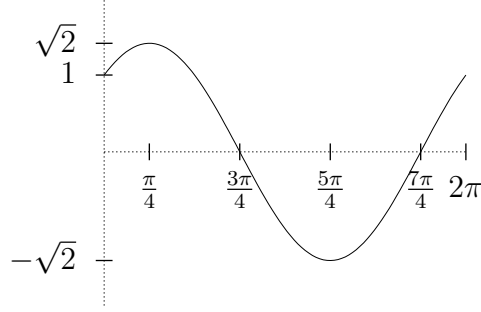
- 2) $y = 1 - \frac{1}{x}$
- 3) $y = \frac{1}{1+x} - 1$
- 4) $y = \frac{4}{x+3-\sqrt{x^2-2x+5}}$
- 5) $y = x - 1 + \frac{4}{x-3}$
- 6) $y = x \tan x$
- 7) $y = x \ln x$
- 8) $y = \frac{e^x - 1}{x(x-1)}$

9) $y = \frac{2x+1}{x-1}$

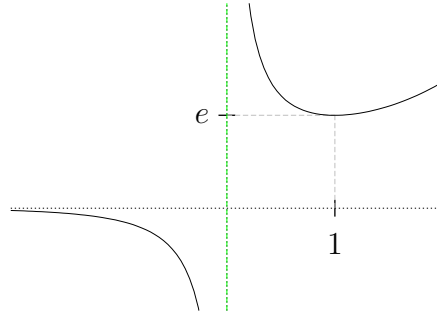
10) $y = x^2 e^{-x}$

11) $y = \frac{x^2-1}{x-2}$

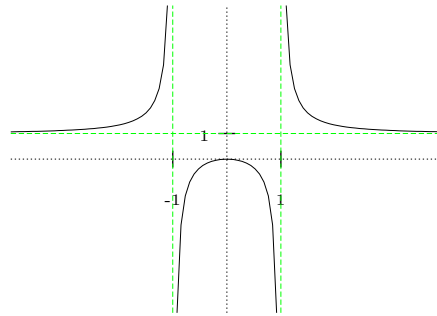
12) $f(x) = \sin x + \cos x$ fonksiyonunun $[0, 2\pi]$ aralığında grafiğini çiziniz.



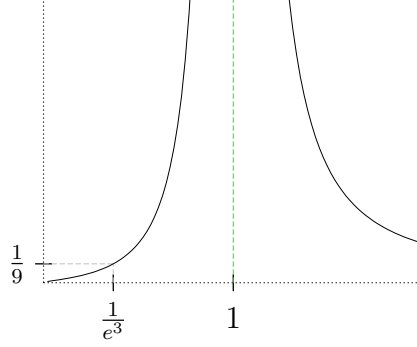
13) $f(x) = \frac{e^x}{x}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.



14) $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

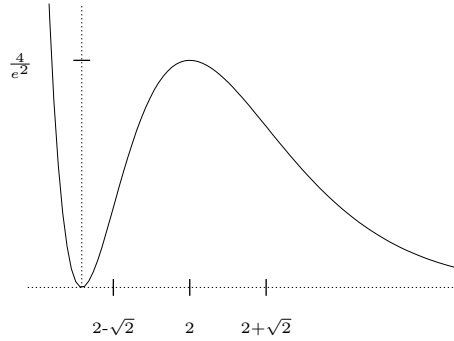


15) $f(x) = \frac{1}{(\ln x)^2}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.



$(0, \frac{1}{e^3})$ aralığı aşağı konkav, diğer aralıklar yukarı konkavdır.

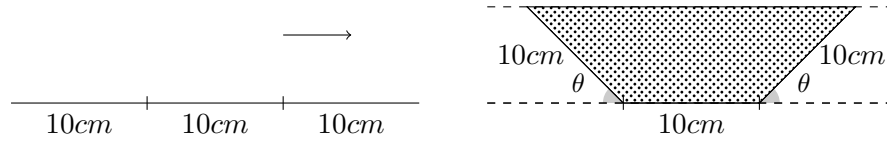
16) $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.



$2 - \sqrt{2}$ ve $2 + \sqrt{2}$ noktaları büküm noktalarıdır.

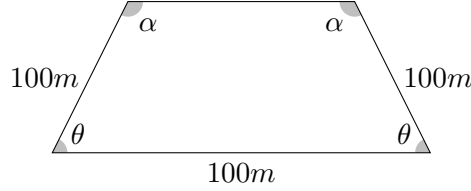
4.5 Maksimum Minimum Problemleri

- 1) Çarpımları 12, toplamları maksimum olan iki pozitif tamsayıyı bulunuz.
- 2) Alanı $1000m^2$ olan dikdörtgenler içinde çevre uzunluğu en küçük olanın boyutlarını bulunuz.
- 3) $10m$ uzunluğundaki bir tel iki parçaya kesiliyor. Bir parçasından kare, diğer parçasından eşkenar üçgen yapılıyor. Kapatılan toplam alanın
 - a) maksimum
 - b) minimumolması için tel nasıl kesilmelidir.
- 4) $30cm$ genişliğindeki bir metal levha şekildeki gibi kıvrılıyor ve üstü kapatılıyor.

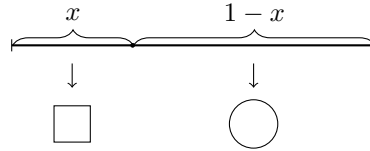


Kıvrılan parça ile yer arasında kalan açı θ olmak üzere, alanı maksimum yapan θ açısını bulunuz.

- 5) 12000cm^2 lik bir malzemeden tabanı kare, üstü açık bir kutu yapılmak istenirse; en büyük hacimli kutunun boyutları ne olur?
- 6) Şekildeki dörtgenin alanını maksimum yapan θ açısını bulunuz.



- 7) 1m uzunluğundaki bir tel parçası iki parçaya bölünüyor. Bir parçasından çember şekil, kalan parçasından kare şekil yapılıyor. Çember ve karenin alanları toplamını maksimum ve minimum yapmak için tel nereden bölünmelidir.



4.6 Belirsiz Durumlar ve L'Hopital Kuralı

Aşağıdaki limitleri bulunuz.

- 1) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{x^2} - 1}{x \tan(x)}$ limitini hesaplayınız. Cevap: 1
- 2) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{3^h - 1}{h} = ?$ ($\ln 3$)
- 3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + 2x - 4}{x - 1}$
- 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{12x^2}$
- 5) $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\cos \theta - 1}{\theta \sin \theta}$
- 6) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 2x^2 + 4}{4x^3 - 2x^2 + 5x + 3}$
- 7) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$

$$8) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - x \cos \frac{1}{x} \right)$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{x+1}{x} \right)$$

$$10) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - \sin x}{3x + \sin x}$$

$$11) \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \left(\frac{1}{x^2 + 1} \right)$$

$$12) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1+x) - x^2}{x^2 \sin x}$$

$$13) \lim_{x \rightarrow \infty} x 2^{-\sqrt{x}}$$

$$14) \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{\ln x}$$

$$15) \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{\ln x}}$$

$$16) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^{x^3}}{9^{x^2}}$$

Bölüm 5: İntegraller

Anti-Türev

Aşağıdaki fonksiyonların anti-türevlerini bulunuz.

$$1) \frac{3}{2} \sqrt{x}$$

$$2) -\pi \sin(\pi x)$$

$$3) 1 - 8 \sec^2(2x)$$

$$4) e^{3x}$$

$$5) x^{\sqrt{3}}$$

$$6) x - \left(\frac{1}{2} \right)^x$$

$$7) \pi^x - x^{-1}$$