# Çalışma Soruları

## 1.1 Eşitsizlik, Aralık, Mutlak Değer

1. Aşağıdaki eşitsizliklerin tanım kümesini bulunuz.

a) $(x+1)^2 \cdot x \cdot (x-1) < 0$  b) $\dfrac{(x-3)(x+1)}{(x+2)} > 0$

c) $(x-1)^2 < 4$

## Çözüm ve Cevaplar:

a) $(x+1)^2 \cdot x\,(x-1) < 0 \Rightarrow x=0\ ,\ x=1$ kökleridir

$x=-1$ çift katlı bir köktür.

| $x$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $(x+1)$ | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ |
| $(x+1)$ | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ |
| $(x-1)$ | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $x$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ |
| $(x+1)^2 \cdot x \cdot (x-1)$ | $+$ | | $+$ | | $-$ | | $+$ |

Aradığımız aralık

$\Rightarrow Ç.K = (0,1)$

b) $\dfrac{(x-3)(x+1)}{(x+2)} > 0 \Rightarrow$ 
$x-3=0$  $x=3$
$x+1=0 \Rightarrow x=-1$  fakat $x \neq -2$
$x+2=0$  $x=-2$

| $x$ | | $-2$ | | $-1$ | | $3$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $(x-3)$ | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $(x+1)$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ |
| $(x+2)$ | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ |
| $\dfrac{(x-3)(x+1)}{(x+2)}$ | $-$ | | $+$ | | $-$ | | $+$ |

$\Rightarrow Ç.K = (-2,-1) \cup (3,\infty)$

c) $Ç.K = (-1, 3)$

2) Aşağıdaki eşitliklerin çözüm kümelerini bulunuz

a) $|x+1| = |x+2|$ b) $|x-2| + |x-1| = 2$

Çözüm ve Cevaplar: a) $Ç.K = \{ \frac{-3}{2} \}$

b) $|x-2| + |x-1| = 2$

i) $(x-2) \leq 0$ ve $(x-1) \leq 0 \Rightarrow -(x-2) - (x-1) = 2 \quad x \in (-\infty, 1]$

$-x+2-x+1 = 2 \Rightarrow 2x = 1$

$\Rightarrow x = \frac{1}{2} \in (-\infty, 1]$ ✓

ii) $(x-2) \leq 0$ ve $(x-1) \geq 0 \Rightarrow -(x-2) + (x-1) = 2 \quad x \in [1, 2]$

$-x+2+x-1 = 2 \Rightarrow 1 = 2$ (çelişki

bu aralıkta uygun bir x yo

iii) $(x-2) \geq 0$ ve $(x-1) \geq 0 \Rightarrow x-2+x-1 = 2 \quad x \in [2, \infty)$

$\Rightarrow 2x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{2} \in [2, \infty)$

$\Rightarrow Ç.K = \{ \frac{1}{2}, \frac{5}{2} \}$

3) Aşağıdaki eşitsizliklerin çözüm kümelerini bulun.

a) $\left|3y - \frac{1}{4}\right| < \frac{1}{2}$ b) $\left|\frac{3}{2} z - 1\right| \leq 2$

Çözüm ve Cevaplar: a) $\left|3y - \frac{1}{4}\right| < \frac{1}{2}$

$\Rightarrow -\frac{1}{2} < 3y - \frac{1}{4} < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{-1}{4} < 3y < \frac{3}{4}$

$\Rightarrow \frac{-1}{12} < y < \frac{1}{4} \Rightarrow Ç.K = \left(\frac{-1}{12}, \frac{1}{4}\right)$

b) $\left|\frac{3}{2}z-1\right| \leq 2 \implies -2 \leq \frac{3}{2}z-1 \leq 2$

$\implies -1 \leq \frac{3}{2}z \leq 3 \implies \frac{-2}{3} \leq z \leq 2$

$\implies Ç.K = \left[\frac{-2}{3}, 2\right]$

4) $|x-3| + |x-5| - |x+9| = -11$ denklemini çözün

Cevap: $Ç.K = \{4, 6\}$

## 1.2 Fonksiyon, Bileşke Fonksiyon ve Önemli Bazı Fonksiyonlar, Basit Grafikler

1) Aşağıdaki fonksiyonların tanım ve değer kümelerini bulunuz.

a) $h(x) = \log_x 5$ b) $f(z) = \frac{1}{\sqrt{4-z^2}}$

c) $f(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x}}$

Çözüm ve Cevaplar:

a) $\log_x 5 \in \mathbb{R} \iff x \neq 1$ ve $x > 0$

$\implies D = (0,1) \cup (1,\infty)$ $R = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

b) $4 - z^2 > 0 \implies 4 > z^2$

$\implies -2 < z < 2 \implies D = (-2, 2)$

$0 < \sqrt{4-z^2} \leq 2$ ve $1 > 0 \implies R = \left[\frac{1}{2}, \infty\right)$

c) $D = [0, \infty)$ $R = (0, 1]$

2. $f(x)=\sqrt{x+4}$ ve $g(x)=x^3+5$ ise

$(f\circ g)(x)$ ve $(g\circ f)(x)$'i yazınız ve tanım kümelerini bulunuz.

<u>Çözüm:</u> $f:[-4,\infty)\longrightarrow[0,\infty)$ $\quad g:(-\infty,\infty)\longrightarrow(-\infty,\infty)$

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x^3+5)=\sqrt{x^3+9}$$

$$f\circ g:[-\sqrt[3]{9},\infty)\longrightarrow[0,\infty)$$

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(\sqrt{x+4})=\sqrt{(x+4)^3}+5$$

$$g\circ f:[-4,\infty)\longrightarrow[5,\infty)$$

3. Aşağıdaki fonksiyonların tek veya çift olup olmadıklarını sebebiyle yazınız

a) $f(x)=\dfrac{x+4}{x^3-1}$ $\quad$ b) $g(x)=\cos(x^2+1)$ $\quad$ c) $h(x)=-|x|$

<u>Çözüm ve Cevaplar:</u> a) $f(-x)=\dfrac{-x+4}{-x^3-1}=\dfrac{x-4}{x^3+1}$ $\quad -f(x)=\dfrac{-x-4}{x^3-1}$

$f(x)\neq f(-x)$
$-f(x)\neq f(-x)$ $\Rightarrow$ $f$ ne tektir ne çift

b) $g(-x)=\cos(x^2+1)$ $\quad -g(x)=-\cos(x^2+1)$
$g(x)=\cos(x^2+1)$

$g(x)=g(-x)$ $\Rightarrow$ $g$ çift fonksiyondur

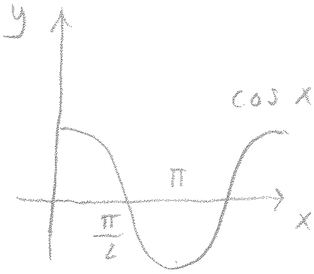
c) $h(x)$ çift fonksiyondur.

4) Aşağıdaki fonksiyonların grafiklerini çiziniz.

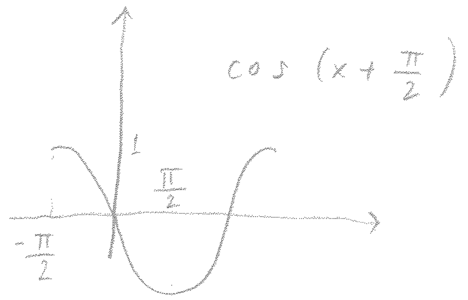
a) $y = 3\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 1$ b) $y = \sqrt{5x^2 - 1}$

Çözüm ve Cevaplar:

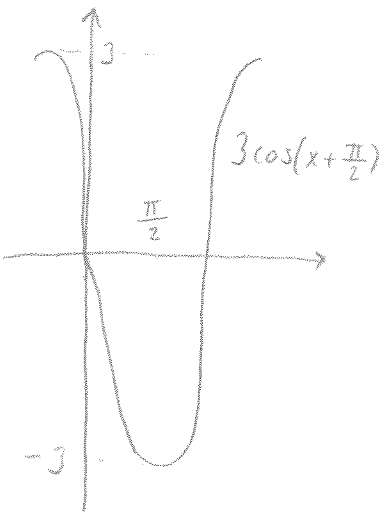
a)



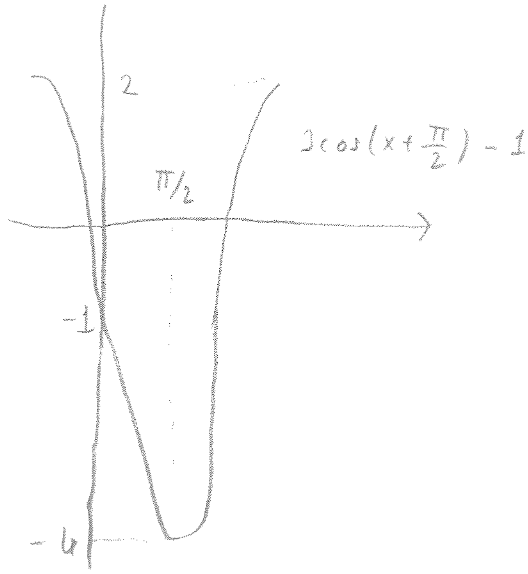

$\xrightarrow{\pi/2 \text{ sola}}$



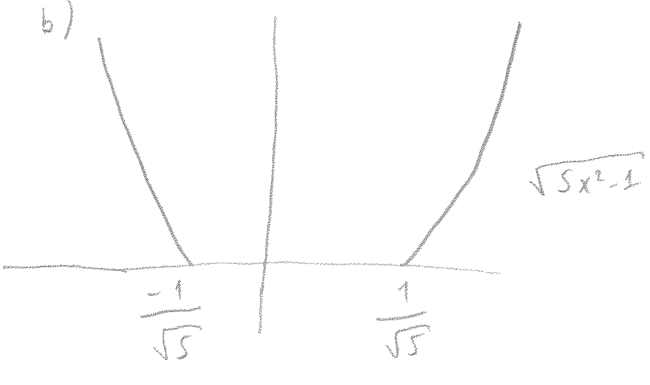

3 çarpanı $\longrightarrow$ ile dikey olarak uzar




$\xrightarrow[\text{aşağı}]{\text{1 birim}}$




b)



## 1.3 Ters Fonksiyon, Trigonometrik Fonksiyon

### Ters Trigonometrik Fonksiyon

1 Aşağıdaki fonksiyonların tanım kümelerini bulunuz.

a) $f(x)=\sqrt{\arcsin(\log_2 x)}$ b) $g(x)=\arccos\left(\dfrac{3}{4+2\sin x}\right)$

c) $h(x)=\arcsin\dfrac{x-3}{2}+\log(4-x)$

Çözüm ve Cevapları:

a) $f(x)\in\mathbb{R} \iff \arcsin(\log_2 x)\geq 0$

$\iff 0\leq \log_2 x\leq 1 \iff 2^0\leq x\leq 2^1 \iff 1\leq x\leq 2$

$D=[1,2]$

b) $g(x)\in\mathbb{R} \iff \left|\dfrac{3}{4+2\sin x}\right| = \dfrac{3}{4+2\sin x}\leq 1$

$\iff 4+2\sin x\geq 3 \iff \sin x\geq \dfrac{-1}{2}$

$\iff \dfrac{-\pi}{6}+2k\pi\leq x\leq \dfrac{7\pi}{6}+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$

$\Rightarrow \quad D=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left[\dfrac{-\pi}{6}+2k\pi, \dfrac{7\pi}{6}\,2k\pi\right]$

c) $h(x)\in\mathbb{R} \iff \left|\dfrac{x-3}{2}\right|\leq 1$ ve $4-x>0$

$\iff -2\leq x-3\leq 2$ ve $x<4$

$\iff 1\leq x\leq 5$ ve $x<4 \Rightarrow D=[1,4)$

2) $\arcsin \frac{x-1}{x+1} = \arccos \frac{2\sqrt{x}}{x+1}$ eşitliğinin doğruluğunu gösteriniz

Çözüm: $y = \arcsin \frac{x-1}{x+1} \Rightarrow \sin y = \frac{x-1}{x+1}$

$$\Rightarrow \sqrt{1-\cos^2 y} = \frac{x-1}{x+1} \Rightarrow \cos^2 y = \frac{(x+1)^2 - (x-1)^2}{(x+1)^2}$$

$$\Rightarrow \cos^2 y = \frac{4x}{(x+1)^2} \Rightarrow \cos y = \frac{2\sqrt{x}}{x+1}$$

$$\Rightarrow y = \arccos \frac{2\sqrt{x}}{x+1}$$

3) Aşağıdaki bağıntıların doğruluğunu gösteriniz.

a) $\sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

b) $\tan(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

c) $\mathrm{arc}(\arccos x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$

Çözüm ve Cevapları:

a) $\arctan x = y \Rightarrow \tan y = x \Rightarrow \frac{\sin y}{\cos y} = x$

$$\Rightarrow \frac{\sin y}{\sqrt{1-\sin y^2}} = x \Rightarrow \sin^2 y = x^2 - x^2 \sin y$$

$$\Rightarrow \sin^2 y = \frac{x^2}{1+x^2} \Rightarrow \sin y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow \sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

b) ödev c) ödev

4) Aşağıdaki tanımlanan $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarının eğer varsa terslerini bulunuz.

a) $f(x) = 1 - x^2$

b) $f(x) = \begin{cases} x, & x < 1 \\ x^2, & 1 \le x \le 4 \\ 8x, & 4 < x \end{cases}$

Çözümler:

a) $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 1 - x_1^2 = 1 - x_2^2$

$\Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1 = \pm x_2 \Rightarrow f$ 1-1 değildir

Dolayısıyla tersi yoktur.

b) $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1, x_2 < 1 \Rightarrow x_1 = x_2$ ✓

$1 \le x_1, x_2 \le 4 \Rightarrow x_1^2 = x_2^2$ çünkü

$\Rightarrow x_1 = x_2$ $x_1, x_2 \in [1,4$

$x_1, x_2 > 4 \Rightarrow 8x_1 = 8x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$

$\Rightarrow f$ 1-1'dir.

$\forall y \in \mathbb{R}$ için, $x < 1 \Rightarrow x = y$

$1 \le x \le 4 \Rightarrow x = \sqrt{y}$ olacak şekilde $x \in \mathbb{R}$

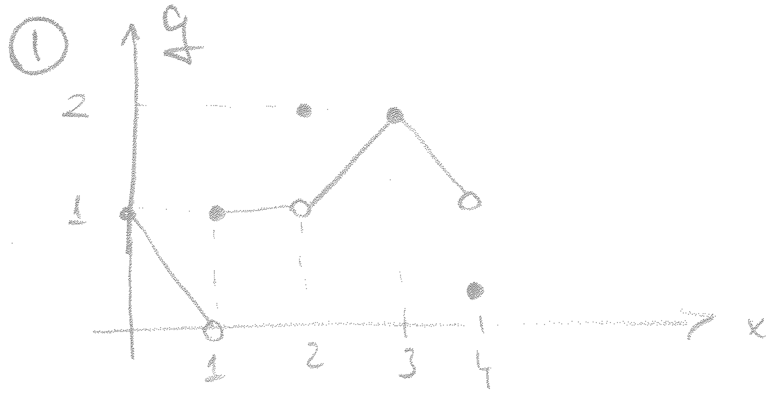
$4 < x \Rightarrow x = \frac{y}{8}$ vardır.

$\Rightarrow f$ örtendir. O halde, tersi vardır.

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} y, & y < 1 \\ \sqrt{y}, & 1 \le y \le 16 \\ \frac{y}{8}, & 32 < y \end{cases}$$

## 2.4: Sürekli Fonksiyonlar ve Özellikleri

(1)




tanım aralığı $[0,4]$ olan yandaki fonksiyonu ele alalım $x=0,1,2,3$ ve $4$ noktalarındaki $f$ nin sürekliliğini açıklayın.

Çözüm:

i) $x=0$ için
- $f(0)=1 \rightarrow$ mevcut
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$ (uç nokta old. tek taraflı limit)
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$

$\Rightarrow$ $x=0$ da sürekli.

ii) $x=1$ için
- $f(1)=1$
- $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 1 \neq \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 0 \Rightarrow$ limit yok!

$\Rightarrow$ $x=1$ de süreksiz

iii) $x=2$ için
- $f(2)=2$
- $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 1 = \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) \Rightarrow \lim\limits_{x\to 2} f(x) = 1$
- $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 1 \neq 2 = f(2)$ X

$\Rightarrow$ $x=2$ de süreksiz.

. $x=3$ için . $f(3)=2$

. $\lim_{x\to 3} f(x)=2$

. $\lim_{x\to 3} f(x)=f(3)=2$

$\Rightarrow$ $x=3$ de sürekli.

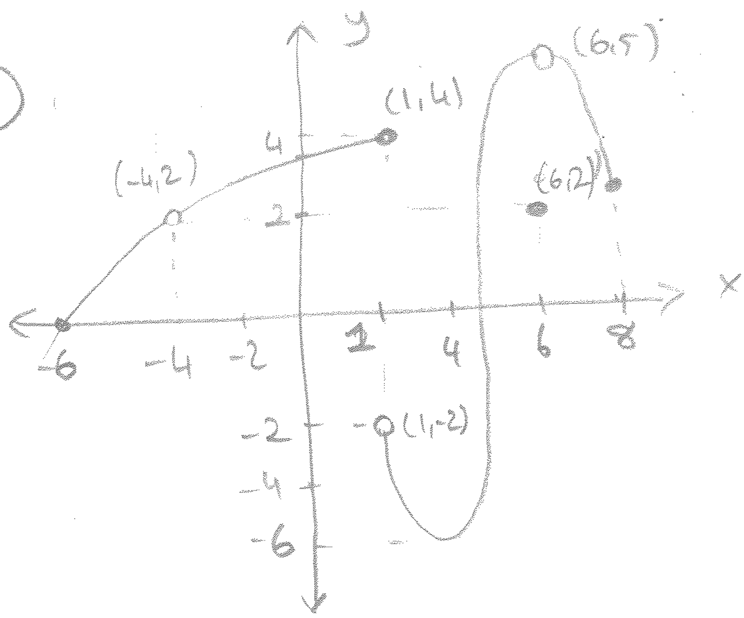
• $x=4$ için . $f(4)$ mevcut

. $\lim_{x\to 4^-} f(x)=1$

• $\lim_{x\to 4^-} f(x)\neq f(4)$ X

$\Rightarrow$ $x=4$ de süreksiz.

(2)




Yandaki grafiği verilen fonk için $x=-4, 1, 6, 8$ de sürekli olup olmadığını nedenleriyle inceleyiniz

CEVAP:

• $x=-4$ de süreksiz

• $x=1$ de süreksiz

• $x=6$ da süreksiz

• $x=8$ de sürekli

③ a nın hangi değerleri için

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1 , & x<3 \\ 2ax , & x\geq 3 \end{cases}$$

her yerde süreklidir?

Çözüm:

x=3 noktasında inceleyelim. (x<3 ve x>3 için polinom olup sürekli.)

⇒ x=3 de sürekli olabilmesi için:

$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^-} f(x) = f(3)$ olmalıdır.

$\lim_{x\to 3^-} (x^2-1) = \lim_{x\to 3^+} (2ax) \Rightarrow 8 = 6a \Rightarrow \boxed{a=\frac{4}{3}}$.

④ $g(x)=\dfrac{x^2-16}{(x^2-3x-4)}$ fonk. x=4 de sürekli olması için g(4) değeri ne olarak tanımlanmalıdır?

CEVAP:

$g(4)=\frac{8}{3}$

5) $y=\dfrac{x+1}{x^2-4x+3}$ fonk. sürekli old. aralığı bulun.

Çözüm:

$\Rightarrow y=\dfrac{x+1}{(x-3)(x-1)}$ burada $x=3$ ve $x=1$ noktalarında

fonk tanımsız olup sürekliliği bozan noktalardır. Rasyonel

fonk olduğundan bu noktalar haricinde süreklidir.

Yani $\mathbb{R}-\{1,3\}$ sürekli olduğu aralıktır.

6) $y=\dfrac{|x-1|+\sin x}{\cos x}$ fonk sürekli old. aralığı bulun

CEVAP:

$[1,\infty)-\{x\in\mathbb{R} \mid x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\}$

⑦ $y = \dfrac{x \cdot \cos(x^{2/3})}{1+x^4}$ fonk sürekli old. aralığı bulun.

Çözüm:

$\Rightarrow y = \dfrac{x \cdot \cos((\sqrt[3]{x})^2)}{1+x^4}$ $\Rightarrow$ tanımsızlık yaratan bir nokta olmadığından $\mathbb{R}$'de sürekli.

⑧ $y = \dfrac{\sqrt[4]{3x-1}}{1-\sin^2 x}$ fonk sürekli old. aralığı bulun.

CEVAP:

$$\left(\frac{1}{3}, \infty\right) - \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + \pi k\right\}$$

⑨ $\lim\limits_{x \to \pi} \sin(x - \sin x)$ limitini hesaplayın.

Çözüm:

$\lim\limits_{x \to \pi} \sin(x - \sin x) = \sin\left(\lim\limits_{x \to \pi} (x - \sin x)\right)$

sin fonk sürekli old.

$= \sin(\pi - \sin\pi)$

$= \sin\pi$

$= 0$

(10) $\lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \sqrt{\csc^2 x + 5\sqrt{3}\tan x}$ limitinin değerini bulun.

CEVAP

$\boxed{3}$

## 2.5. Süreklilikle İlgili Teoremler

① Kübünden bir eksik olan bir reel sayı var mıdır?

Çözüm:

Yani $x^3 - 1 = x$ denkleminin bir çözümünü arıyoruz.

$f(x) = x^3 - x - 1$ olarak belirlersek, bu fonksiyonu 0 yapan bir nokta arıyoruz. O halde

$f(1) = -1$, $f(2) = 5$ olup Bolzona teoreminden $[1,2]$ aralığında en az bir $c$ vardır öyle ki $f(c) = 0$ dır.

Bu da bize $x^3 - 1 = x$ denkleminin bir çözümü old. söyler.

② $y = x^3$ eğrisi ile $y = 3x - 1$ doğrusunun en az bir noktada kesiştiğini gösteriniz.

③ $x^3 - 15x + 1 = 0$ denkleminin $[-4, 4]$ aralığında üç çözümü old. gösteriniz.

(4) $F(x) = (x-a)^2 (x-b)^2 + x$ fonksiyonunun $x$ in bazı değerleri için $\left(\frac{a+b}{2}\right)$ değerini aldığını gösterin. $(a \neq b)$

ÇÖZÜM:

Yani $F(x) = \frac{a+b}{2}$ o.ş $x$'ler old. göstermek istiyoruz

$g(x) = F(x) - \left(\frac{a+b}{2}\right) = (x-a)^2 (x-b)^2 + x - \left(\frac{a+b}{2}\right)$ olarak tanımlayalım

$g(a) = \frac{a-b}{2}$ ve $g(b) = \frac{b-a}{2} = -\left(\frac{a-b}{2}\right)$ olarak

bulunur. Buradan $g(a) > 0 \Rightarrow g(b) < 0$ ya da

$g(a) < 0 \Rightarrow g(a) > 0$ dır.

O halde ~~Bolzano teoreminden~~ $\exists x \in [a,b] \Rightarrow$

$g(x) = 0$ olur.

Buradan da $[a,b]$ aralığında en az bir $x$ vardır öyle

ki $g(x) = F(x) - \frac{a+b}{2} = 0 \Rightarrow F(x) = \frac{a+b}{2}$ dir.

## 2.6. Üstel ve Logaritma Fonksiyonları

1) Aşağıdaki fonksiyonların tanım kümelerini bulunuz.

a) $(2+3e^{-x})^{-1}$

b) $\log_2\left(\frac{3x^2}{(x+1)^5}\right)$

Çözüm:

a) $f(x)=(2+3e^{-x})^{-1}=\frac{1}{2+3e^{-x}}=\frac{1}{2+\frac{3}{e^x}}=\frac{e^x}{2e^x+3}$

Fonk. tanımlı olabilmesi için $2e^x+3\neq 0$ olmalıdır. Yani $e^x\neq -\frac{3}{2}$ dir. Zaten biliyoruz ki $\forall x\in\mathbb{R}$ için $e^x$ pozitif tanımlıdır. Dolayısıyla $-\frac{3}{2}$ olmasını sağlayacak bir x değeri mevcut değildir.

$\Rightarrow$ $\mathbb{R}$'de tanımlı.

b) $\Rightarrow (-1,\infty)-\{0\}$

2) Aşağıdaki fonksiyonların tersleri mevcut mudur? Mevcutsa bulunuz.

a) $f(x)=\frac{3}{1-e^{2x}}$

b) $\log_5(x^3+3)$

Çözüm:

a) $\Rightarrow$ Tersi var. $f^{-1}(x)=\frac{1}{2}\ln\left(1-\frac{3}{x}\right)$

b) $f(x) = \log_5(x^3+5)$

fonk $\mathbb{R}$'de tanımlıdır. Tersinin mevcut olması için 1-1 olmalıdır.

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ için $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ oluyorsa fonk

1-1 dir.

$\cdot\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \log_5(x_1^3+5) = \log_5(x_2^3+5)$

$\Rightarrow x_1^3 + 5 = x_2^3 + 5$

$\Rightarrow x_1^3 = x_2^3$

$\Rightarrow x_1 = x_2$

Öyleyse 1-1 dir. Tersi mevcuttur. Tersini bulalım.

$f(x) = \log_5(x^3+5) \Rightarrow y = \log_5(x^3+5)$

$\Rightarrow x^3 + 5 = 5^y$

$\Rightarrow x^3 = 5^y - 5$

$\Rightarrow \boxed{x = \sqrt[3]{5^y - 5}}$ //

3) Aşağıdaki fonksiyonların grafiklerini çiziniz.

a) $y = |\ln x|$

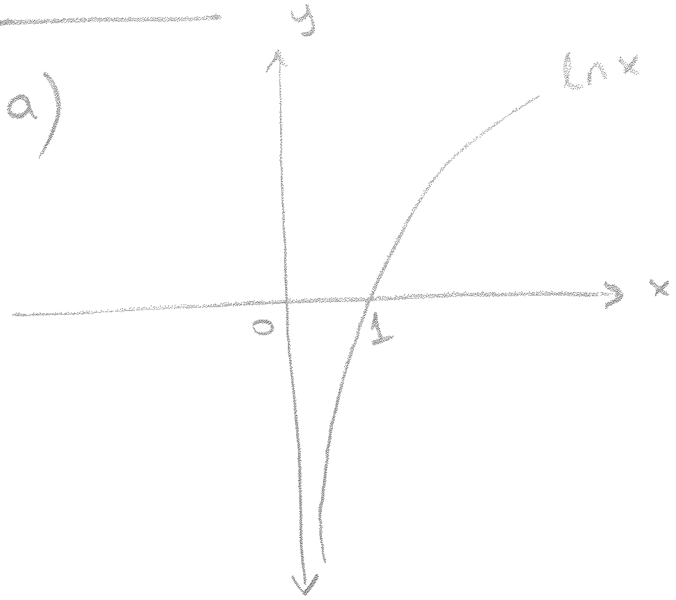
b) $y = 2\ln(x-2)$

c) $y = \log_3(x-1)$

c) $y = -3e^{2x} + 7$

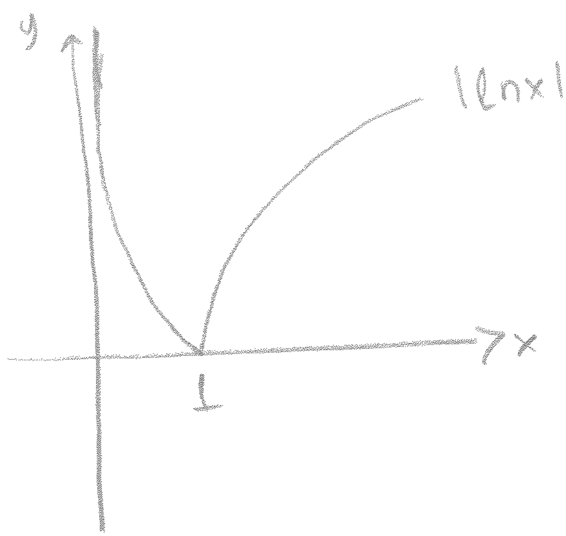
Çözüm

a)




İlk olarak ln x fonk grafiğini sağdaki gibi çizdik
|ln x| fonk ise negatif değerler alamayacağından x-ekseni altındaki kısmın (negatif değerli kısım) x-eks. göre simetriğini almalıyız.

O halde $y = |\ln x|$ fonk grafiği aşağıdaki şekildedir



SORULAR

1. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

a. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^2+2^2+3^2+\dots+n^2}{n^3}$

b. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$

c. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n.\sin n!}{n^2+1}$

d. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\cdot\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)+\left(1+\frac{2}{n}\right)+\dots+\left(1+\frac{n}{n}\right)\right]$

Çözüm

a. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^2+2^2+\dots+n^2}{n^3} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{6}\cdot\frac{n.(n+1).(2n+1)}{n^3} = \frac{1}{3}$

b. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+1}-n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)}{\sqrt{n^2+1}+n}$

c. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n.\sin(n!)}{n^2+1}\right)$ $\quad -1<\sin n!<1 \Rightarrow \frac{-n}{n^2+1}<\frac{n.\sin(n!)}{n^2+1}<\frac{n}{n^2+1}$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{-n}{n^2+1}=0 \quad , \quad \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}=0 \\ \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n.\sin(n!)}{n^2+1}=0 \end{array}\right\}$ ... sandviç teoreminden

d. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\cdot\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)+\left(1+\frac{2}{n}\right)+\dots+\left(1+\frac{n}{n}\right)\right]$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\cdot\left[n+\frac{n.(n+1)}{2n}\right] = \lim\limits_{n\to\infty} 1+\frac{n+1}{2n} = 1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

. Aşağıdaki fonksiyonların karşılarında yazılı noktalardaki sağ ve sol ... limitlerini
...lunuz.

a. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ , $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & , x<1 \\ 3 & , x=1 \\ 4x-1 & , x<1 \end{cases}$ ... $a=1$

b. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ , $f(x) = \dfrac{x^4-1}{x^2+1}$ , $a=1$

c. $f: \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$ , $f(x) = \dfrac{|x^2-4|}{x-2}$ , $a=2$

## Çözüm

a. $f: R \to R$ , $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & , x<1 \\ 3 & , x=1 \\ 4x-1 & , x>1 \end{cases}$ , $a=1$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1} (2x+1) = 3 \quad , \quad \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1} (4x-1) = 3$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1} f(x) = 3$$

b. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ , $f(x) = \dfrac{x^4-1}{x^2+1}$ , $a=1$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^4-1}{x^2+1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x^2+1).(x^2-1)}{x^2+1}$$

$$= \lim_{x \to 1} (x^2-1) = 0$$

c. $f: R \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$ , $f(x) = \dfrac{|x^2-4|}{x-2}$ , $a=2$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \frac{|x^2-4|}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x \to 2} (x+2) = 4$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \frac{|x^2-4|}{x-2} = \lim_{x \to 2} - \frac{(x^2-4)}{x-2} = - \lim_{x \to 2} (x+2) = -4$$

$4 \neq -4$ olduğundan bu durumda 2 noktasında limit yoktur.

6. Aşağıdaki fonksiyonların yanlarında yazılı noktalardaki limitlerini bulunuz.

a. $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{|2x|}{x}$, $a = 0$

b. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x/2, & x < 1 \text{ ise} \\ 0, & x = 1 \text{ ise} \\ 1/2, & x > 1 \text{ ise} \end{cases}$ $a = 1$

c. $f: (0, 2\pi) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|\sin x|}{\sin x}, & x \neq \pi \\ 0, & x = \pi \end{cases}$ $a = \pi$

Çözüm

a. $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{|2x|}{x}$, $a = 2$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to 0^+} f(x) &= \lim_{x \to 0^+} \frac{|2x|}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{2x}{x} = 2 \\ \lim_{x \to 0^-} f(x) &= \lim_{x \to 0^-} \frac{|2x|}{x} = \lim_{x \to 0} -\frac{2x}{x} = -2 \end{aligned}\right\} \text{limit mevcut değil}$$

b. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a = 1$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \qquad \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 1} f(x) = \frac{1}{2}$$

c. $f: (0, 2\pi) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|\sin x|}{\sin x}, & x \neq \pi \\ 0, & x = \pi \end{cases}$ $a = \pi$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to \pi^+} f(x) &= \lim_{x \to \pi^+} \frac{|\sin x|}{\sin x} = \lim_{x \to \pi} -\frac{\sin x}{\sin x} = -1 \\ \lim_{x \to \pi^-} f(x) &= \lim_{x \to \pi^-} \frac{|\sin x|}{\sin x} = \lim_{x \to \pi} \frac{\sin x}{\sin x} = 1 \end{aligned}\right\} \lim_{x \to \pi} f(x) \text{ yoktur.}$$

4. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

a. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2}{x^2-1} - \dfrac{1}{x-1}$

b. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{|2x|}{x}$

c. $\lim\limits_{x\to 2} [\![x]\!]$

ç. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{ax^2+bx+c}{px^2+qx+r}$

d. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-8}{x-2}$

e. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x^2}$

f. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x+h)^m - x^m}{h}$ , $(m\in \mathbb{N})$

g. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{3\sqrt{x} - 3\sqrt{a}}{x-a}$

h. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$

ı. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$

i. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\sqrt{x^2-5x+6} - x\right)$

j. $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\sqrt{x^2+5x+1} + x\right)$

Çözüm

a. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2}{x^2-1} - \dfrac{1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2-(x+1)}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{-(x-1)}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1} -\dfrac{1}{x+1} = -\dfrac{1}{2}$

b. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}^+} \dfrac{|2x|}{x} = \lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{2x}{x} = 2$ , $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}^-} \dfrac{|2x|}{x} = \lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{2x}{x} = 2$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{|2x|}{x} = 2$

c. $\lim\limits_{x\to 2^+} [\![x]\!] = 2$ , $\lim\limits_{x\to 2^-} [\![x]\!] = 1$ (Tam değer fonksiyonu)

$\Rightarrow$ limit mevcut değildir.

ç. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{ax^2+bx+c}{px^2+qx+r} = \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^2\left(a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}\right)}{x^2\left(p+\frac{q}{x}+\frac{r}{x^2}\right)} = \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}{p+\frac{q}{x}+\frac{r}{x^2}} = \dfrac{a}{p}$

d. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-8}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4-4}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} (x+2) - \dfrac{4}{(x-2)}$

$\lim\limits_{x\to 2^+} \left( x+2-\dfrac{4}{x-2} \right) = -\infty \quad , \quad \lim\limits_{x\to 2^-} \left( x+2-\dfrac{4}{x-2} \right) = +\infty$

$\Rightarrow$ limit mevcut değildir.

e. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-\sqrt{1-4x^2})(1+\sqrt{1-4x^2})}{x^2\cdot(1+\sqrt{1-4x^2})}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-(1-4x^2)}{x^2(1+\sqrt{1-4x^2})}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4x^2}{x^2(1+\sqrt{1-4x^2}}$

$= 2$

f. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^m - x^m}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{x^m + \binom{m}{1} x^{m-1} h + \dots + \binom{m}{m} h^m - x^m}{h}$

$= \binom{m}{1} x^{m-1} = m\, x^{m-1}$

g. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{3\sqrt{x} - 3\sqrt{a}}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{(3\sqrt{x}-3\sqrt{a})(3\sqrt{x}+3\sqrt{a})}{(x-a)(3\sqrt{x}+3\sqrt{a})}$

$= \lim\limits_{x\to a} \dfrac{9x-9a}{(x-a)(3\sqrt{x}+3\sqrt{a})}$

$= \lim\limits_{x\to a} \dfrac{9}{3\sqrt{x}+3\sqrt{a}}$

$= \dfrac{3}{2\sqrt{a}}$

h. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} \cdot \dfrac{(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

i. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})}{x} \cdot \dfrac{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{(\sqrt{1+x})+(\sqrt{1-x})}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+x-1+x}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$

$= 0$

i. $\lim\limits_{x\to \infty} (\sqrt{x^2-5x+6}-x) = \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{(\sqrt{x^2-5x+6}-x)(\sqrt{x^2-5x+6}+x)}{\sqrt{x^2-5x+6}+x}$

$= \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{-5x+6}{\sqrt{x^2-5x+6}+x}$

$= \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x\left(-5+\frac{6}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}+1\right)} = -\dfrac{5}{2}$

j. $\lim\limits_{x\to -\infty} (\sqrt{x^2+5x+1}+x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{(\sqrt{x^2+5x+1}+x)(\sqrt{x^2+5x+1}-x)}{(\sqrt{x^2+5x+1}-x)}$

$= \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{5x+1}{|x|\cdot\sqrt{1+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}-x}$

$= \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x\left(5+\frac{1}{x}\right)}{-x\left(\sqrt{1+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)}$

$= -\dfrac{5}{2}$

5. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

a. $\lim_{x \to \pi/2} \frac{\sin x}{x}$

b. $\lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x}$

c. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin ax}{bx}$

d. $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos ax}{x^2}$

e. $\lim_{x \to a} \frac{\sin x - \sin a}{x-a}$

f. $\lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$

g. $\lim_{x \to 0} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2}$

Çözüm

a. $\lim_{x \to \pi/2} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{\pi/2} = \frac{2}{\pi}$

b. $\lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x}$ , $-1 \leq \sin x \leq 1$ , $-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$ $(x>0)$

$\lim_{x \to \infty} -\frac{1}{x} = 0$ , $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$ (sıkıştırma kriterinden)

$\Rightarrow \lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$

c. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin ax}{bx} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin ax}{ax} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$

d. $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos ax}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1-\left(1-\sin^2 \frac{a}{2} x\right)}{x^2}$

$= \lim_{x \to 0} \left[\frac{\sin \frac{ax}{2}}{ax/2}\right]^2 \cdot \frac{a^2}{4}$

$= \frac{a^2}{4}$

e. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sin x - \sin a}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{2\cdot\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{x-a}$

$= \lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\frac{x-a}{2}} \cdot \cos\left(\frac{x+a}{2}\right)$

$= 1 \cos a$

$= \cos a$

f. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin x.\cos h + \cos x.\sin h - \sin x}{h}$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\cos h - 1}{h}.\sin x + \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin h}{h}.\cos x$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\left(1-2\sin^2\frac{h}{2}\right)-1}{h} \sin x + \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin h}{h}.\cos x$

$= \lim\limits_{h\to 0} -\dfrac{2}{2} \dfrac{\sin\frac{h}{2}}{\phantom{x}} . \dfrac{\sin\frac{h}{2}}{\phantom{x}} .\sin x + \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin h}{h}.\cos x$

$= 0.\sin x + 1.\cos x = \cos x$

g. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos ax - \cos bx}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - 2.\sin^2\frac{ax}{2} - \left(1 - 2\sin^2\frac{bx}{2}\right)}{x^2}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \left[\dfrac{b^2}{2}\cdot\left(\dfrac{\sin\frac{bx}{2}}{\frac{bx}{2}}\right) - \dfrac{a^2}{2}\left(\dfrac{\sin\frac{ax}{2}}{\frac{ax}{2}}\right)^2\right]$

$= \dfrac{b^2-a^2}{2}$

6. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

a. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(x^2-1)}{x-1}$

b. $\lim\limits_{x\to \infty} x \sin\dfrac{1}{x}$

c. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(\tan x)}{\sin x}$

d. $\lim\limits_{x\to \pi/2} \dfrac{\sin(\cos x)}{\cos x}$

Çözüm

a. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(x^2-1)}{x-1} \cdot \dfrac{(x+1)}{(x+1)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(x^2-1)}{x^2-1} \cdot (x+1) = 1 \cdot 2 = 2$

b. $\lim\limits_{x\to \infty} x \sin\dfrac{1}{x}$ ifadesinde $\dfrac{1}{x}=t$ denirse $x\to\infty \Leftrightarrow t\to 0$

$$\lim_{x\to\infty} x \sin\frac{1}{x} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \sin t = 1$$

c. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(\tan x)}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(\tan x)}{\dfrac{\sin x}{\cos x}} \cdot \dfrac{1}{\cos x}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(\tan x)}{\tan x} \cdot \frac{1}{\cos x}$$

$$= 1$$

d. $\lim\limits_{x\to \pi/2} \dfrac{\sin(\cos x)}{\cos x}$ için ( $\cos x = u$ denirse $x \to \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow u \to 0$ )

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\cos x)}{\cos x} = \lim_{u\to 0} \frac{\sin u}{u} = 1$$

## I- Türev Alma

Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini bulunuz.

1) $f(s) = \dfrac{\sqrt{s}-1}{\sqrt{s}+1}$ 2) $u = \dfrac{5x+1}{2\sqrt{x}}$

3) $w = (z+1)(z-1)(z^2+1)$ 4) $y = \dfrac{\cot x}{1+\cot x}$

5) $r = \sec\theta \csc\theta$

Çözüm:

1) $f'(s) = \dfrac{(\sqrt{s}+1)\left(\frac{1}{2\sqrt{s}}\right) - (\sqrt{s}-1)\left(\frac{1}{2\sqrt{s}}\right)}{(\sqrt{s}+1)^2} = \dfrac{(\sqrt{s}+1)-(\sqrt{s}-1)}{2\sqrt{s}\,(\sqrt{s}+1)^2}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{s}\,(\sqrt{s}+1)^2}$

2) $u = \dfrac{5x+1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = \dfrac{(2\sqrt{x})5 - (5x+1)(1/\sqrt{x})}{4x}$

$= \dfrac{5x-1}{4x^{3/2}}$

3) $w = (z+1)(z-1)(z^2+1) = (z^2-1)(z^2+1) = z^4-1$

$\Rightarrow \dfrac{dw}{dz} = 4z^3 - 0 = 4z^3$

4) $y = \dfrac{\cot x}{1+\cot x} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(1+\cot x)(-\csc^2 x) - (\cot x)(-\csc^2 x)}{(1+\cot x)^2}$

$= \dfrac{-\csc^2 x - \csc^2 x \cot x + \csc^2 x \cot x}{(1+\cot x)^2}$

$= \dfrac{-\csc^2 x}{(1+\cot x)^2}$

5) $r = \sec\theta \csc\theta \Rightarrow \frac{dr}{d\theta} = \sec\theta(-\csc\theta\cot\theta) + \csc\theta(\sec\theta\tan\theta)$

$$= -\frac{1}{\cos\theta}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{1}{\cos\theta}\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$= \frac{-1}{\sin^2\theta} + \frac{1}{\cos^2\theta} = \sec^2\theta - \csc^2\theta$$

Aşağıdaki fonksiyonların Türevlerini bulunuz

6) $r = (1+\sec\theta)\sin\theta$

7) $p = (1+\csc q)\cos q$

8) $p = \frac{\tan q}{1+\tan q}$

9) $y = x^2\cos x - 2x\sin x - 2\cos x$

10) $y = \frac{4}{\cos x} + \frac{1}{\tan x}$

# II - Kapalı Fonksiyonların Türevi

Aşağıdaki problemlerde $\frac{dy}{dx}$'i bulunuz

1) $x = \tan y$

2) $2xy + y^2 = x + y$

3) $(3xy+7)^2 = 6y$

4) $x^2 = \frac{x-y}{x+y}$

5) $xy = \cot(xy)$

6) $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$

7) $2\sqrt{y} = x - y$

8) $y^2 - 2x = 1 - 2y$

9) $x + \sin y = xy$

10) $y^2 \cos\left(\frac{1}{y}\right) = 2x + 2y$

## Çözümler:

1) $x = \tan y \Rightarrow 1 = (\sec^2 y)\frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec^2 y} = \cos^2 y$

2) $2xy + y^2 = x + y \Rightarrow 2x\frac{dy}{dx} + 2y + 2y\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}$

$\Rightarrow (2x + 2y - 1)\frac{dy}{dx} = 1 - 2y$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1-2y}{2x+2y-1}$

3) $(3xy+7)^2 = 6y \Rightarrow 2(3xy+7)\left(3x\frac{dy}{dx} + 3y\right) = 6\frac{dy}{dx}$

$\Rightarrow 2(3xy+7)(3x)\frac{dy}{dx} - 6\frac{dy}{dx} = -6y(3xy+7)$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx}\left[6x(3xy+7) - 6\right] = -6y(3xy+7)$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y(3xy+7)}{x(3xy+7)-1} = \frac{3xy^2+7y}{1-3x^2y-7x}$

4) $x^2 = \frac{x-y}{x+y} \Rightarrow x^3 + x^2 y = x - y \Rightarrow 3x^2 + 2xy + x^2 y' = 1 - y'$

$$\Rightarrow (x^2+1)\, y' = 1 - 3x^2 - 2xy$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1 - 3x^2 - 2xy}{x^2+1}$$

5) $xy = \cot(xy) \Rightarrow x\frac{dy}{dx} + y = -\csc^2(xy)\left(x\frac{dy}{dx} + y\right)$

$$\Rightarrow x\frac{dy}{dx} + x\csc^2(xy)\frac{dy}{dx} = -y\csc^2(xy) - y$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}\left[x + x\csc^2(xy)\right] = -y\left[\csc^2(xy) + 1\right]$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-y\left[\csc^2(xy)+1\right]}{x\left[1+\csc^2(xy)\right]} = -\frac{y}{x}$$

# III - Zincir Kuralı

1) $y=f(u)$ ve $u=g(x)$ verilmiştir. $\frac{dy}{dx}$'i bulunuz.

a) $y=\sin u$, $u=3x+1$ b) $y=2u^3$, $u=8x-1$

c) $y=\tan u$, $u=10x-5$ d) $y=-\sec u$, $u=x^2+7x$

Çözüm:

a) $f(u)=\sin u \Rightarrow f'(u)=\cos u$

$\Rightarrow f'(g(x))=\cos(3x+1)$

$g(x)=3x+1 \Rightarrow g'(x)=3$

$$\frac{dy}{dx}=f'(g(x))g'(x)=3\cos(3x+1)$$

d) $f(u)=-\sec u \Rightarrow f'(u)=-\sec u \tan u$

$\Rightarrow f'(g(x))=-\sec(x^2+7x)\tan(x^2+7x)$

$g(x)=x^2+7x \Rightarrow g'(x)=2x+7$

$$\frac{dy}{dx}=f'(g(x))g'(x)=-(2x+7)\sec(x^2+7x)\tan(x^2+7x)$$

2) Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini bulun

a) $y=\left(1-\frac{x}{7}\right)^{-7}$ b) $y=\sec(\tan x)$

c) $p=\sqrt{3-t}$ d) $s=\frac{4}{3\pi}\sin 3t+\frac{4}{5\pi}\cos 5t$

e) $r=(\csc\theta+\cot\theta)^{-1}$ f) $y=\frac{1}{x}\sin^{-5}x-\frac{x}{3}\cos^3 x$

g) $y = \frac{1}{21}(3x-2)^7 + \left(4 - \frac{1}{2x^2}\right)^{-1}$

h) $h(x) = x\tan(2\sqrt{x}) + 7$

i) $k(x) = x^2 \sec\left(\frac{1}{x}\right)$

j) $f(\theta) = \left(\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}\right)^2$

k) $g(t) = \left(\frac{1+\cos t}{\sin t}\right)^{-1}$

Çözümler: a) $u = 1 - \frac{x}{7}$ olsun $\Rightarrow y = u^{-7}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = -7u^{-8}\cdot\left(-\frac{1}{7}\right) = \left(1-\frac{x}{7}\right)^{-8}$$

b) $u = \tan x \Rightarrow y = \sec u$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = (\sec u \tan u)(\sec^2 x)$$

$$= \sec(\tan x)\tan(\tan x)\sec^2 x$$

c) $u = 3 - t \Rightarrow p = \sqrt{u}$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{dp}{du}\frac{du}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot(-1) = \frac{-1}{2\sqrt{3-t}}$$

d) $s = \frac{4}{3\pi}\sin 3t + \frac{4}{5\pi}\cos 5t$

$$\Rightarrow \frac{ds}{dt} = \frac{4}{3\pi}3\cos 3t + \frac{4}{5\pi}\cdot 5(-\sin 5t)$$

$$= \frac{4}{\pi}\cos 3t - \frac{4}{\pi}\sin 5t$$

# IV Bir fonksiyonun türevi, geometrik yorumu, teğet ve normal denklemleri

1) Türev tanımını kullanarak aşağıdaki fonksiyonların türevlerini bulun.

a) $f(x) = 4 - x^2$; $f'(-3) = ?$

b) $k(z) = \dfrac{1-z}{2z}$ ; $k'(\sqrt{2}) = ?$

c) $r = \dfrac{s^3}{2} + 1$ ise $\dfrac{dr}{ds} = ?$

d) $y = 2x^3$, $y'(-2) = ?$

e) $s = \dfrac{t}{2t+1}$

f) $z = \dfrac{1}{\sqrt{3w-2}}$

2) $y = x^3 - 6x + 2$ eğrisine teğet ve $y = 6x - 2$ doğrusuna paralel olan doğrunun denklemini bulunuz

cevap: $y = 6x + 18$ ve $y = 6x - 14$

3) $y = \dfrac{x}{1+x^2}$ eğrisine orijinde teğet olan doğrunun denklemini yazınız.

cevap: $y = x$

4) $y = \dfrac{ax}{a^2+x^2}$ eğrisinin hangi noktalarındaki teğetleri $y = \sqrt{2a - x^2}$ eğrisinin $x = a$ noktasındaki teğetine paralel olur.

cevap: $(a, 1/2)$, $(-a, -1/2)$

5) $x^2 + 4y^2 = 4$ elipsine teğet olan ve $(4,0)$ noktasından geçen doğruların denklemini yazınız

cevap: $x + 2\sqrt{3}y = 4$ ve $x - 2\sqrt{3}y = 4$

6) $x^2 - 2xy + y^2 + 2x + y = 6$ eğrisine $A(2,2)$ noktasında teğet olan doğrunun denklemini yazınız.

cevap: $y = -2x + 6$

7) $y=2x$ doğrusunun $y=x^2+ax+b$ paraboline $A(2,4)$ noktasında teğet olması için $a$ ve $b$ ne olmalıdır.

cevap: $a=-2$ ve $b=4$

8) $\begin{cases} x = t\cos t \\ y = t\sin t \end{cases}$ parametrik denklemi ile verilen eğriye $t=\frac{\pi}{4}$ noktasından çizilen teğetin denklemini yazınız.

cevap: $y = \frac{4+\pi}{4-\pi}\left(x - \frac{\sqrt{2}\pi}{8}\right) + \frac{\sqrt{2}}{8}\pi$

9) $y = \arcsin \frac{x-1}{2}$ eğrisine, bu eğrinin x-eksenini kesim noktasından çizilen teğet ve normalinin denklemini yazınız.

cevap: Teğet denk: $x-2y=1$
Normalin denk: $2x+y=2$

10) $y = x(|x|+2)$ eğrisine orijinde teğet olan doğrunun denklemini bulunuz.

cevap: $y=2x$

11) Aşağıdaki eğrilere karşılarında yazılı noktalarındaki teğetlerinin denklemini yazınız.

a) $4x^2+y^2=80$ ; $A(4,4)$ cevap: $4x+y=20$

b) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$ ; $A(2,2)$ cevap: $x+y=4$

c) $x^2+xy+y^2=3$ ; $A(1,1)$ cevap: $x+y=2$

d) $2(x^2+y^2)^2 = 25(x^2-y^2)$ ; $A(3,1)$ cevap: $9x+13y=40$

Çözümler

1) a) $f'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{[4-(x+h)^2]-(4-x^2)}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \dfrac{(4-x^2-2xh-h^2)-4+x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{-2xh-h^2}{h}$

$= \lim_{h\to 0} (-2x-h) = -2x$

Yani $f'(x) = -2x$ ; $f'(-3) = 6$

b) $k(z) = \dfrac{1-z}{2z}$ ve $k(z+h) = \dfrac{1-(z+h)}{2(z+h)}$

$\Rightarrow k'(z) = \lim_{h\to 0} \dfrac{\left(\dfrac{1-(z+h)}{2(z+h)} - \dfrac{1-z}{2z}\right)}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \dfrac{(1-z-h)z-(1-z)(z+h)}{2(z+h)zh}$

$= \lim_{h\to 0} \dfrac{z-z^2-zh-z-h+z^2+zh}{2(z+h)zh}$

$= \lim_{h\to 0} \dfrac{-h}{2(z+h)zh} = \lim_{h\to 0} \dfrac{-1}{2(z+h)z} = \dfrac{-1}{2z^2}$

$\Rightarrow k'(\sqrt{2}) = -\dfrac{1}{4}$

2) Teğetin eğimi 6 olacağından, türevin 6 olacağı noktayı bulalım.

$y' = 3x^2 - 6 = 6 \Rightarrow 3x^2 = 12 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x_1 = -2,\ x_2 = 2$

$y_1 = (-2)^3 - 6(-2) + 2 = 6$

$y_2 = 2^3 - 6 \cdot 2 + 2 = -2$

olduğundan $A(-2,6)$, $B(2,-2)$ noktalarındaki teğetler

$y = 6x - 2$ 'ye paralel olur. Bu teğetlerin denklemi

$y - 6 = 6(x+2) \Rightarrow y = 6x + 18$

$y + 2 = 6(x-2) \Rightarrow y = 6x - 14$ olur

3) $y' = \dfrac{1(1+x^2) - 2x^2}{(1+x^2)^2} = \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \Rightarrow m = y'(0) = 1$ olur.

Teğetin denklemi $y - 0 = 1(x-0) \Rightarrow y = x$ olur.

7) $y' = 2x + a \Rightarrow m = 4 + a = 2 \Rightarrow a = -2$ bulunur.

Diğer taraftan $A(2,4)$ noktası parabol üzerinde bulunduğundan

$4 = 4 - 2 \cdot 2 + b \Rightarrow b = 4$ olur.

11) a) $4x^2 + y^2 = 80 \Rightarrow 8x + 2yy' = 0 \Rightarrow y' = -\dfrac{4x}{y}$

$\Rightarrow m = -\dfrac{4 \cdot 4}{4} = -4$ olur.

o halde teğetin denklemi

$y - 4 = -4(x-4) \Rightarrow 4x + y = 20$ olur

3,4 3,5 3,6 } Trigonometrik ve ters trigonometrik türevler, üstel ve logaritmik türevler

Soru: $\cos 2x = y$ fonksiyonunun n. mertebeden türevini bulunuz.

Çözüm: ilk birkaç türevi aldıktan sonra genel formülü yazmaya çalışalım:

$y' = -2 \cdot \sin 2x \quad (k=0)$

$y'' = -2^2 \cos 2x \quad (k=1)$

$y^{(3)} = 2^3 \sin 2x \quad (k=1)$

$y^{(4)} = 2^4 \cos 2x \quad (k=2)$

$y^{(5)} = -2^5 \sin 2x \quad [k=2]$

$y^{(6)} = -2^6 \cos 2x \quad (k=3)$

$\vdots$

$y^{(2k)}$ lara bakarsak işaret k'ya bağlıdır:

$\underline{y^{(2k)} = (-1)^k \cdot 2^{2k} \cdot \cos 2x}$ bulunur.

Benzer şekilde $y^{(2k+1)}$ de:

$\underline{y^{(2k+1)} = (-1)^{k+1} \cdot 2^{2k+1} \cdot \sin 2x}$

bulunur. //

Soru: $\dfrac{d}{dx}\left[\sec^2\left(\dfrac{x}{x+1}\right)\right] = ?$

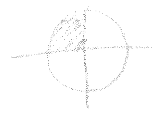
Çözüm: $y' = 2\sec\left(\dfrac{x}{x+1}\right) \cdot \left[\sec\left(\dfrac{x}{x+1}\right)\right]'$

$= 2\sec\left(\dfrac{x}{x+1}\right) \cdot \sec\left(\dfrac{x}{x+1}\right) \cdot \tan\left(\dfrac{x}{x+1}\right) \cdot \left(\dfrac{x}{x+1}\right)'$

$= 2\sec^2\left(\dfrac{x}{x+1}\right) \cdot \tan\left(\dfrac{x}{x+1}\right) \cdot \dfrac{1}{(x+1)^2}$ //

Soru: Aşağıdaki ifadeleri hesaplayınız.

a) $\tan\left(\cos^{-1}(-1/3)\right) = ?$

Çözüm: $\cos^{-1}(-1/3) = \alpha$ diyelim. arccos x fonksiyonunun değer kümesi $[0, \pi]$ olduğundan $\alpha \in [0, \pi]$ dir ve $-\frac{1}{3}$ teki değeri istendiği için $\alpha \in [\pi/2, \pi]$ (II. çeyrek ) diyebiliriz.

$$\Rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{3} \Rightarrow \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

$$\Rightarrow \sin\alpha = \mp \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

II. çeyrekte old.dan $\sin\alpha = +\frac{2\sqrt{2}}{3}$ bulunur.

$$\Rightarrow \tan\left(\cos^{-1}(-1/3)\right) = \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -2\sqrt{2} \text{ dir //.}$$

b) $\sin^{-1}\left(\frac{1}{\csc 4}\right) = ?$ Not: Burada 4 derece değil, 4 radyandır.

İpucu: arcsin x fonksiyonunun değer kümesi $[-\pi/2, \pi/2]$ dir.

Soru: $y^{1/3} = \dfrac{\sqrt{2x+1}\cdot(1+2^x)^5}{\sin x}$ olduğu biliniyorsa

$dy/dx = ?$

Çözüm: iki tarafın doğal logaritmasını alarak türev alalım:

$$\Rightarrow \ln y^{1/3} = \ln\left[\frac{\sqrt{2x+1}\cdot(1+2^x)^5}{\sin x}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\ln y = \ln\sqrt{2x+1} + \ln(1+2^x)^5 - \ln(\sin x)$$

$$= \frac{1}{2}\ln(2x+1) + 5\ln(1+2^x) - \ln(\sin x)$$

(türev)

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\cdot y'\cdot\frac{1}{y} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{2x+1} + \frac{5\cdot\ln 2\cdot 2^x}{1+2^x} - \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}y'\cdot\frac{1}{y} = \frac{1}{2x+1} + \frac{5\ln 2\cdot 2^x}{1+2^x} - \cot x$$

$$\Rightarrow y' = 3y\left(\frac{1}{2x+1} + \frac{5\ln 2\cdot 2^x}{1+2^x} - \cot x\right) //$$

Soru: $y = \dfrac{1}{[\ln 2x]^2}$ ise $y' = ?$

Soru: $y = x^{(2x)^{\sin x}}$ ise $dy/dx = ?$

Çözüm: $(2x)^{\sin x} = A$ olsun $\Rightarrow y = x^A$

olur. Doğal logaritmasını alırsak

$\ln y = \ln x^A = A \cdot \ln x$ olup türevi:

$y' \cdot \frac{1}{y} = A' \cdot \ln x + A \cdot \frac{1}{x}$ gelir $A = (2x)^{\sin x}$

logaritmasını alıp sonra türevini alırsak

$\ln A = \sin x . \ln 2x \Rightarrow A' \cdot \frac{1}{A} = \cos x . \ln 2x + \frac{2 \sin x}{2x}$

veya $A' = A \cdot \left(\cos x \cdot \ln 2x + \frac{\sin x}{x}\right) = (2x)^{\sin x} \cdot \left(\cos x \cdot \ln 2x + \frac{\sin x}{x}\right)$

olup $y' = A' \cdot \ln x + \frac{A}{x}$

$$y' = (2x)^{\sin x} \cdot \left(\cos x \cdot \ln 2x + \frac{\sin x}{x}\right) \cdot \ln x + \frac{(2x)^{\sin x}}{x}$$ bulunur //.

Soru: $f(x) = \frac{tg(tg\, x)}{\sin(\sin x)}$ fonksiyonu orijinde

sürekli olacak şekilde nasıl genişletebiliriz?

Soru: $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & , \quad x \neq 0 \text{ ise} \\ 0 & , \quad x = 0 \text{ ise} \end{cases}$

şeklinde tanımlanan fonksiyon orijinde türevlenebilir midir? Eğer öyle ise o noktada türevi nedir?

Çözüm: Önce, $x_0 = 0$ 'da sürekli midir?

$\lim_{x \to 0} f(x) \overset{?}{=} f(0)$ $\qquad \lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} =$

$= e^{\lim_{x \to 0} -\frac{1}{x^2}} = (e^{-\infty}) = 0$ ve $f(0) = 0$ olup

$f$, $x_0 = 0$ 'da süreklidir.

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^{-\frac{1}{h^2}} - 0}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \underbrace{\frac{+1/h^2}{e^{1/h^2}}}_{(\to 0 \text{ çünkü üstel daha hızlı})} \cdot h = 0.0 = 0$$ bulunur. //

Soru: $y = \arcsin(\sec^2(e^{2x}))$ ise $dy/dx = ?$

Soru: $y^x + x^y = 2$ olduğu biliniyor ise $\frac{dy}{dx} = ?$

iki tarafın türevini alalım:

$$\frac{d}{dx}\left(y^x + x^y\right) = 0 \Rightarrow \frac{d(y^x)}{dx} + \frac{d(x^y)}{dx} = 0$$

$y^x = w$ dersek $\ln y^x = \ln w$

$$\Rightarrow x \ln y = \ln w$$

$\xrightarrow{\text{(türev)}}$ $\ln y + x \cdot \frac{y'}{y} = w' \cdot \frac{1}{w}$

$$\Rightarrow w' = w \cdot \left(\ln y + \frac{xy'}{y}\right) = y^x \cdot \left(\ln y + \frac{x \cdot y'}{y}\right);$$

$x^y = z$ dersek $\ln x^y = \ln z$

$$\Rightarrow y \ln x = \ln z$$

$\xrightarrow{\text{(türev)}}$ $y' \cdot \ln x + y \cdot \frac{1}{x} = z' \cdot \frac{1}{z}$

$$\Rightarrow z' = z \cdot \left(y' \ln x + y/x\right) = x^y \cdot \left(y' \ln x + y/x\right);$$

O halde $\frac{d}{dx}\left(y^x + x^y\right) = 0$

$$\Rightarrow w' + z' = 0 \Rightarrow y^x\left(\ln y + \frac{x \cdot y'}{y}\right) + x^y\left(y' \ln x + y/x\right) = 0$$

$$\Rightarrow y' = -\frac{y^x \ln y + y \cdot x^{y-1}}{x \cdot y^{x-1} + x^y \cdot \ln x}$$ bulunur. //

Soru: $r\cdot\cos 2s + \sin^2 s = \pi$ ise $\dfrac{dr}{ds} = ?$

Soru: $-\csc 5x \cot 5x = y$ ise $y' = ?$

Soru: $-\sec^2 \dfrac{3x}{2} = y$ ise $y' = ?$

Soru: $y = \sqrt{\dfrac{(x+1)^5}{(x+2)^{20}}}$ ise $y' = ?$

Soru: $y = \ln(\sec\theta + \tan\theta)$ ise $\dfrac{dy}{d\theta} = ?$

Soru: $y = \ln(\ln(\ln x))$ ise $\dfrac{dy}{dx} = ?$

Soru: $y = \dfrac{x\sqrt{x^2+1}}{(x+1)^{2/3}} + x\cdot(x+1)(x+2)(x+3)$ ise $y' = ?$

Soru: $\ln y = e^y \sin x$ ise $dy/dx = ?$

Soru: $y = 2^x$ ise $y' = ?$

Soru: $y = 5^{\sqrt{5}}$ ise $dy/ds = ?$

Soru: $y = (\cos x)^{\sqrt{5}}$ ise $y' = ?$

Soru: $y = 3^{\log_2 x}$ ise $y' = ?$

Soru: $y = \log_7\left(\dfrac{\sin x \cdot \cos x}{e^x \cdot 2^x}\right)$ ise $y' = ?$

3.7. Parametrik Olarak verilmiş eğri ve parametrik Türev

Soru 1) Aşağıda parametrik denklemleri verilen fonksiyonların türevlerini bulunuz

a) $x = t^3+1$ , $y = t^2 - 2t$ , $t \in \mathbb{R}$

b) $x = \sqrt[3]{t} + e^t$ , $y = \sqrt{t} - \arcsin t$

c) $x = \sin^3 t\,(\cos t)^{1/2}$ , $y = \cos^3 t\,(\cos t)^{1/2}$

d) $x = \ln(t + \sqrt{1+t^2})$ , $y = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$

e) $x = \arccos(\sqrt{t})$ , $y = t^{\sin t}$

Çözüm: a) $$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2t-2}{3t^2} = \frac{2}{3t} - \frac{2}{3t^2}$$

c) $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{-3.\cos^2 t . \sin t . (\cos t)^{1/2} - \cos^3 t\,(\cos t)^{-1/2} \sin t}{3\sin^2 t \cos t\,(\cos t)^{1/2} - \sin^3 t\,(\cos t)^{-1/2} \sin t}$$

$$= \frac{\cos^2 t \sin t\,(-3(\cos t)^{1/2} - \cos t.(\cos t)^{-1/2})}{\sin^2 t \cos t\,(-3(\cos t)^{1/2} - \sin^2 t\,(\cos t)^{-1/2})}$$

e) $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = [\arccos(\sqrt{t})]' = \frac{-1}{\sqrt{1-t}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} = \frac{-1}{2\sqrt{t(1-t)}}$$

$\dfrac{dy}{dt} = [t^{\sin t}]' \Rightarrow$ $y = t^{\sin t}$ her iki tarafın ln alalım:

$\ln y = \sin t \ln t$ her iki tarafın $\underline{t}$ ye göre türevini alalım.

$$\Rightarrow \quad \frac{\frac{dy}{dt}}{y} = \cos t \ln t + \sin t \frac{1}{t}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dt} = t^{\sin t}\left[\cos t \ln t + \sin t \frac{1}{t}\right]$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dt} = \frac{t^{\sin t}\left[\cos t \ln t + \frac{\sin t}{t}\right]}{\frac{-1}{2\sqrt{t(1-t)}}}$$

$$= -2\sqrt{t(1-t)} \; t^{\sin t}\left[\cos t \ln t + \frac{\sin t}{t}\right]$$

Soru 2) Parametrik denklemi $x = t^3 - 3t$, $y = t^2 - 5t - 1$ olan C eğrisinin $t=2$ ye karşılık gelen teğetinin denklemini bulunuz. $t$ nin hangi değerleri için teğet yatay veya düşeydir.

Çözüm: Teğetin eğimi: $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2t-5}{3t^2-3}$

$t=2$ ye karşılık gelen teğet denklemin eğimi:

$$m = \frac{2.2-5}{3.2^2-3} = -\frac{1}{9}$$

$t=2$ için $x = 2^3 - 3.2 = 2$ ve $y = 2^2 - 5.2 - 1 = -7$ dir.

Teğet doğrunun denklemi:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y + 7 = -\frac{1}{9}(x-2) \quad \text{veya} \quad x + 9y + 61 = 0$$

$\frac{dy}{dx}=0$ ise eğim 0, yani teğet yataydır. O halde

$\frac{2t-5}{3t^2-3}=0 \Leftrightarrow t=\frac{5}{2}$ iken teğet yataydır.

Teğetin düşey olması için eğim $-\infty$ veya $+\infty$ olmalı yani

$3t^2-3=0 \Leftrightarrow t=\mp 1$ olmalıdır.

Soru 3) Aşağıda parametrik denklemleri verilen eğrilerin yatay ve düşey teğetlerini bulunuz.

a) $x=3t^2-6t$, $y=\sqrt{t}$, $t\geq 0$

b) $x=4t^2$, $y=t^3-12t$, $t\in\mathbb{R}$

c) $x=2t^2-3t+1$, $y=-t^2+2t+2$ $t\in\mathbb{R}$

Çözüm: a) $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{1}{2\sqrt{t}}}{6t-6}=\frac{1}{12(t\sqrt{t}-\sqrt{t})}$

$\frac{dy}{dx}=0$ o.ş. $t$ değeri olmadığından yatay teğet yoktur.

düşey teğet olması için:

$12(t\sqrt{t}-\sqrt{t})=0 \Rightarrow t=0$ ya da $t=1$ elde edilir

$t=0$ için $x=0$ düşey teğet

$t=1$ için $x=3-6=-3$ düşey teğet

b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{3t^2-12}{8t}$

yatay teğet olması için $\dfrac{dy}{dx}=0$ olmalıdır.

$\dfrac{dy}{dx}=0 \iff 3t^2-12=0$

$t^2=4 \Rightarrow t=\pm 2$

$t=+2$ ise $x=16$ ve $y=2^3-12.2=8-24=-16$

$t=-2$ ise $x=16$ ve $y=(-2)^3-12.(-2)=-8+24=16$

$t=2$ için teğet doğru : $y=16$

$t=-2$ için teğet doğru : $y=-16$

düşey teğet olması için $8t=0$ olmalı, yani $t=0$ olmalı

$t=0$ ise $x=0$ , $y=0$ $\Rightarrow$ $x=0$ düşey teğettir.

a) cevap: yatay teğet doğru $y=-3$

düşey teğet doğru $x=\dfrac{2}{16}$

Soru 4) Parametrik denklemi $y=t^3-2t$ , $x=6t+1$ olan C eğrisi verilmiş olsun. $3x+5y-8=0$ doğrusuna dik olan teğetlerin değme noktalarını bulunuz.

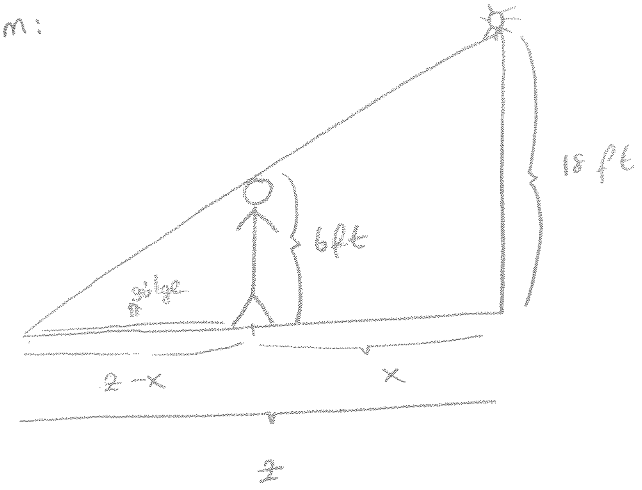
Cevap: Teğetlerin değme noktaları:

$(13,4)$ ve $(-11,-4)$

# 3.8. Bağıl Oranlar

Soru 1) 6 ft uzunluğundaki bir adam 8 ft/s hızla 18 ft uzunluğundaki bir sokak lambasından uzaklaşıyor. Sokak lambasından 100 ft uzaktayken adamın gölgesinin tepesi hangi oranda değişir?

Çözüm:




$\frac{dx}{dt} = 8 \text{ ft/s}$ veriliyor.

$x = 100$ ft iken $\frac{dz}{dt}$ yi bulmak istiyoruz.

Benzerlik kuralından.

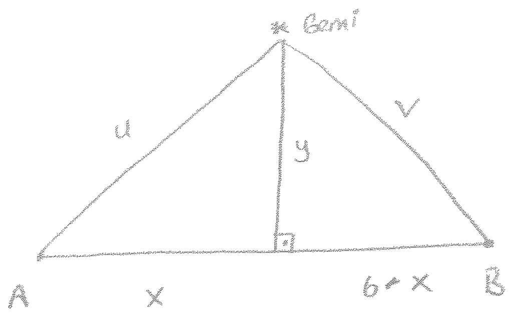
$$\frac{z-x}{6} = \frac{z}{18} \Rightarrow \quad 3z - 3x = z$$

$$2z = 3x$$

O halde $2\frac{dz}{dt} = 3\frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dz}{dt} = \frac{3}{2} \cdot 8 = 12$ ft/s bulunur.

Soru 2) Aralarında 6 km olan ve bir gemiyi izleyen A ve B radarları veriliyor. Gemi A dan 5 km uzaklıkta ve uzaklık 28 km/s hızla artıyor. Gemi B den de 5 km uzaklıkta ve uzaklık 4km/s hızla artıyor. Gemi nerededir, hızı nedir ve hangi yönde hareket eder? (B radarı A nın doğusundadır)

Çözüm:




$$u^2 = x^2 + y^2 \quad \text{ve} \quad v^2 = y^2 + (6-x)^2 \qquad (**)$$

$u = v = 5$ ve $\frac{du}{dt} = 28$ km/s ve $\frac{dv}{dt} = 4$ km/s veriliyor.

$u = v$ olduğundan $x = 6 - x \Rightarrow x = 3$, $y = 4$ bulunur. $\Rightarrow$ O halde gemi A dan 3 km doğuda, 4 km kuzeydedir.

(**) eşitliğinde her iki tarafın türevini alalım:

$$2u \frac{du}{dt} = 2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt}$$

$$2v \frac{dv}{dt} = 2y \frac{dy}{dt} - 2(6-x)\frac{dx}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad 3\frac{dx}{dt} + 4\frac{dy}{dt} = 140$$

$$-3\frac{dx}{dt} + 4\frac{dy}{dt} = 20$$

$\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = 20$ bulunur.

O halde geminin hızı $\sqrt{20^2+20^2} = 20\sqrt{2}$ km/s tir ve gemi (A, B ve gemi konumu resimdeki olmak koşuluyla) kuzey-doğu yönünde hareket eder.

Soru 3) Yarıçapı 2 m olan dairesel koni şeklinde deponun yüksekliği 4 m dir. Deponun içine $2\,m^3/dk$ hızla su pompalanıyorsa, suyun yüksekliği 3 m iken, su seviyesi hangi oranda yükselir?

Cevap: $\frac{8}{9\pi}$ m/dk

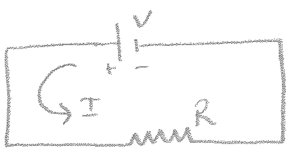
Soru 4) 10 ft uzunluğundaki merdiven dikey duvara yaslanıyor. Merdivenin alt ucu duvardan 2 ft/s hızla uzaklaşıyor, merdiven ile duvar arasındaki açı $\frac{\pi}{4}$ iken, açı hangi oranda değişir.

Cevap.

Soru 5) Bir kız uçurtmasını 90 m yükseklikte uçururken, rüzgar yatay olarak uçurtmayı 8 m/sn hızla kendisinden uzaklaştırmaktadır. Uçurtma kendisinden 150 m uzaklıkta iken kızın ipi salıverme hızını bulunuz.

Cevap: 6.4 m/sn

Soru 6) Aşağıda gösterilen bir elektrik devresinin V (volt) voltajı, I (amper) akımı ve R (ohm) direnci arasında $V = IR$ bağıntısı mevcuttur. Voltajın 1 volt/sn ile arttığında, akımın 1/3 amp/sn ile azaldığı kabul edilsin.




a) $\frac{dV}{dt}$ değerini bulunuz (1 volt/sn)

b) $\frac{dI}{dt}$ değerini bulunuz. $(-\frac{1}{3}$ amp/sn$)$

c) $\frac{dV}{dt}$ oranı ile $\frac{dR}{dt}$ ve $\frac{dI}{dt}$ arasında bir bağıntı bulunuz $\left(\frac{dR}{dt} = \frac{1}{I}\left(\frac{dV}{dt} - \frac{V}{I}\frac{d}{dt}\right.\right.$

d) $V = 12$ volt ve $I = 2$ amp olduğunda R direncin değişim hızını bulunuz ( $\frac{3}{2}$ ohm/sn )

## 3.9. Lineer Yaklaşım ve Diferansiyel

Soru1) Aşağıdaki fonksiyonların belirtilen noktalarda $L(x)$ lineer yaklaşımını bulunuz.

a) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + 2x - 4$ , $x_0 = 0$

b) $f(x) = \frac{x}{x+1}$ , $x_0 = 2$

c) $f(x) = \sin x + \cos x$ , $x_0 = \frac{\pi}{6}$

Çözüm: b) $L(x) \cong f(x)$

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

$$f'(x) = \frac{(x+1) - x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$$

$f(2) = \frac{2}{3}$ ve $f'(2) = \frac{1}{9}$

O halde $L(x) = \frac{2}{3} + \frac{1}{9}(x-2)$ bulunur.

Soru 2. Lineer yaklaşımı kullanarak aşağıda belirtilen noktalarda fonksiyonların yaklaşık değerlerini bulunuz.

a) $f(x) = 3x^3 + 6x^2 + 7x$ $x = 1,01$

b) $f(x) = \sqrt{x}$ , $x = 3,97$

Çözüm: a) $f'(x) = 9x^2 + 12x + 7$

ve lineer yaklaşım:

$L(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$ dir. $x$ yerine $a + \Delta x$ yazılırsa

$L(a+\Delta x) = f(a) + f'(a)\Delta x$ elde edilir.

$a = 1$ ve $\Delta x = 0,01$ alınırsa

$f(1,01) \cong L(1,01) = f(1) + f'(1) \cdot 0,01 = 16 + 28 \cdot 0,01 = 16,28$ bulunur.

b) Cevap: $f(3.97) = 1,9925$

Soru 3) $\sqrt{25.01}$ değerini yaklaşık olarak tahmin ediniz.

Çözüm: $f(x) = \sqrt{x}$ olsun.

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$a = 25$ ve $\Delta x = 0.01$ alalım

$L(a+\Delta x) = f(a) + f'(a)\,\Delta x$

$L(25.01) = f(25) + f'(25) \cdot 0.01 = 5 + \dfrac{1}{10} \cdot 0.01 = 5.001$ bulunur.

Soru 4) $x^3 = 8.05$ olacak şekilde $x$ sayısını tahmin ediniz.

Cevap: $x \approx 2,00417$

Soru 5) Aşağıdaki fonksiyonlar için $dy$ diferansiyellerini bulunuz.

a) $f(x) = \dfrac{(\tan^2 x - 1)(\tan^4 x + 10\tan^2 x + 1)}{3\tan^3 x}$

b) $f(x) = (1+x^2)^x$

Çözüm: b) $dy = f'(x)\,dx$

$f'(x) = \left[(1+x^2)^x\right]'$

Her iki tarafın $\ln$ alalım

$\ln f(x) = x \ln(1+x^2) \Rightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)} = \ln(1+x^2) + x \cdot \dfrac{2x}{1+x^2}$

$\Rightarrow f'(x) = (1+x^2)^2 \left[\ln(1+x^2) + \dfrac{2x^2}{1+x^2}\right]$

$dy = (1+x^2)^2 \left[\ln(1+x^2) + \dfrac{2x^2}{1+x^2}\right] dx$