

MAT 101-MATEMATİK 2 (2012-2013 GÜZ DÖNEMİ)
FİNAL ÇALIŞMA SORULARI

1. Tabanı $2a$ büyük eksenli, $2b$ küçük eksenli elips ile sınırlanan ve büyük eksene dik her kesiti kare olan cismin hacmini bulunuz. Cevap : $\frac{16ab^2}{3}$

2. $y = x$ ve $y = x^2$ eğrileri ile sınırlı R bölgesi $x = -1$ doğrusu etrafında döndürülüyor. Meydana gelen dönel cismin hacmini dilimleme yöntemi (pul metodu) ile bulunuz. Cevap : $\frac{\pi}{2}$

3. $y = 2x^2 - x^3$ ve $y = 0$ ile sınırlı bölge y-ekseni etrafında döndürülüyor. Meydana gelen dönel cismin hacmini bulunuz. Cevap : $\frac{16\pi}{5}$

4. $y = x - x^2$ ve $y = 0$ ile sınırlı bölge $x = 2$ doğrusu etrafında döndürülüyor. Meydana gelen dönel cismin hacmini silindirik kabuk yöntemi ile bulunuz. Cevap : $\frac{\pi}{2}$

5. $y = x^4 + \frac{1}{32x^2}$ eğrisinin $x = 1$ 'den $x = 2$ 'ye kadar uzunluğunu bulunuz. Cevap : $15 + \frac{3}{128}$

6. $y = \sqrt{1 - x^2}$, $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ eğrisi x-ekseni etrafında döndürülüyor. Meydana gelen dönel yüzeyin (kürenin bir parçası) alanını bulunuz. Cevap : π

7. $x = \frac{1}{2}(e^y + e^{-y})$, $0 \leq y \leq \ln 2$ eğrisi y-ekseni etrafında döndürülüyor. Meydana gelen dönel yüzeyin alanını bulunuz. Cevap : $\pi(\frac{15}{16} + \ln 2)$

8. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız:

(a) $\int e^{\sqrt{x}} dx$, (b) $\int e^{ax} \cos bxdx$ ($ab \neq 0$) , (c) $\int_0^1 \tan^{-1} x dx$

Cevaplar: (a) $2(\sqrt{x} - 1)e^{\sqrt{x}} + c$, (b) $e^{ax} \frac{a \cos bx + b \sin bx}{a^2 + b^2} + c$,

(c) $\frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$

9. Herhangi pozitif m ve n tamsayıları için

$$\int_0^1 x^m (1-x)^n dx = \int_0^1 x^n (1-x)^m dx$$

olduğunu gösteriniz. Ayrıca integrali hesaplayınız. Cevap: $\frac{m!n!}{(m+n+1)!}$

10. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız:

(a) $\int \frac{3x^2 + x + 4}{x(x^2 + 2)^2} dx$, (b) $\int \frac{3x}{x^3 - 1} dx$

Cevaplar: (a) $\frac{1}{2} \ln \frac{x^2}{x^2 + 2} + \frac{x - 2}{4(x^2 + 2)} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \tan^{-1} \frac{x}{\sqrt{2}} + c$,

(b) $\ln |x - 1| - \frac{1}{2} \ln(x^2 + x + 1) + \sqrt{3} \tan^{-1} \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} + c$

11. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız:

(a) $\int \sin^3 x \cos^2 x dx$, (b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^4 x \cos^2 x dx$, (c) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^4 x \sec^2 x dx$, (d) $\int \tan^3 x \sec x dx$,

(e) $\int \sin 5x \sin 2x dx$

Cevaplar: (a) $\frac{1}{5} \cos^5 x - \frac{1}{3} \cos^3 x + c$, (b) $\frac{3\pi - 4}{192}$, (c) $\frac{1}{5}$,

(d) $\frac{1}{3} \sec^3 x - \sec x + c$, (e) $\frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} \sin 3x - \frac{1}{7} \sin 7x \right] + c$

12. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız:

(a) $\int \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^2} dx$, (b) $\int \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2 + 4}} dx$, (c) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$,

$$(d) \int_0^{\frac{3\sqrt{3}}{2}} \frac{x^3}{(4x^2+9)^{\frac{3}{2}}} dx, \quad (e) \int \frac{x}{\sqrt{3-2x-x^2}} dx$$

Cevaplar: (a) $-\frac{\sqrt{9-x^2}}{x} - \sin^{-1} \frac{x}{3} + c$, (b) $-\frac{\sqrt{x^2+4}}{4x} + c$, (c) $\ln|x + \sqrt{x^2-a^2}| + c$, (d) $\frac{3}{32}$,
 (e) $-\sqrt{3-2x-x^2} - \sin^{-1} \frac{x+1}{2} + c$

$$13. \int \ln(4x^2 - 4x + 2) dx = ? \quad C: (2x+1) \ln(4x^2 + 4x + 2) - 2(2x+1) + 2 \tan^{-1}(2x+1) + c$$

$$14. \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx = ? \quad C: \frac{-\sqrt{1-x^2}}{x} + \cos^{-1} x + c$$

$$15. \int \frac{e^x}{e^{2x}-1} dx = ? \quad C: \frac{1}{2} \ln|e^x-1| - \frac{1}{2} \ln|e^x+1| + c$$

$$16. \int \frac{dz}{z^2(1+z^2)} = ? \quad C: \frac{-1}{t} - \tan^{-1} t + c$$

$$17. \int y^3 \cos(y^2) dy = ? \quad C: \frac{y^2 \sin y^2}{2} + \frac{\cos y^2}{2} + c$$

$$18. \int \frac{1}{e^x-1} dx = ? \quad C: \ln|e^x-1| - x + c$$

19. $y = x^2, x = 1$ ve $y = 4$ ile sınırlı bölgenin ($x \cdot y \geq 0, I.$ bölge)

a) x -ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini dilimleme yöntemi ile bulunuz.

$$C: v = \int_1^2 \pi(4^2 - x^4) dx = \dots = \frac{129}{5} \pi$$

b) y -ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini kabuk yöntemi ile bulunuz.

$$C: v = \int_1^2 2\pi x(4 - x^2) dx$$

20. $y = 2x - x^2$ eğrisinin $x = 0$ ile $x = 2$ arasında kalan parçasının y -ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan yüzeyin alanını integral ile ifade ediniz. (NOT: İntegrali hesaplamayınız.)

$$C: Y.A. = \int_0^2 2\pi x \sqrt{1 + (2-2x)^2} dx$$

21. $y = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{4x}$ eğrisinin $x = 1$ ile $x = 4$ arasında kalan parçasının uzunluğu nedir?

$$C: \frac{53}{6} \quad (L = \int_1^4 (x^2 + \frac{1}{4x^2}) dx)$$

$$22. \int \frac{1}{1 + \cos x} dx = ? \quad C: -\cot x + \csc x + c \quad \text{veya} \quad \tan(\frac{x}{2}) + c$$

$$23. \int \frac{1}{x^2 \sqrt{9-x^2}} dx = ? \quad C: \frac{-1}{9} \frac{\sqrt{9-x^2}}{x} + c$$

$$24. \int \frac{x^5 - x^3 + 1}{x^3 + 2x^2} dx = ? \quad C: \frac{x^3}{3} - x^2 + 3x - \frac{\ln|x|}{4} - \frac{1}{2x} - \frac{23}{4} \ln|x+2| + c$$

25. $y = x^2 + 3, y = 1, x = 0$ ve $x = 2$ ile sınırlı bölge (NOT: İntegralleri hesaplamayınız.)

a) alanını integral ile ifade ediniz. $C: \int_0^2 (x^2 + 3 - 1) dx$

b) çevre uzunluğunu integral ile ifade ediniz. $C: \text{Çevre} = L + 2 + 2 + 6, \quad L = \int_0^2 \sqrt{1 + (2x)^2} dx$

c) x -ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini integral ile ifade ediniz.

$$C: V = \int_0^2 \pi [(x^2 + 3)^2 - 1^2] dx$$

d) y -ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini integral ile ifade ediniz.

$$C: V = \int_0^2 \pi (x^2 + 2) 2x dx$$

26. $\int \frac{1}{(x-1)(x^2+1)} dx = ?$ C: $\frac{1}{2} \ln|x-1| - \frac{1}{4} \ln(x^2+1) + \frac{1}{2} \tan^{-1} x + c$

27. Düzlemde $y = x^2$ ile $y = x$ in sınırladığı bölgenin

- a) x - eksenini b) y - eksenini c) $y = 2$ doğrusunu

etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini bulunuz.

28. Düzlemde $x = y^2$ ile $y = x^3$ eğrilerinin düzlemde sınırladığı bölgenin

- a) x - eksenini b) y - eksenini c) $x = -1$ doğrusunu

etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmini bulunuz.

29. a) $x = \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{4}y, 1 \leq y \leq 3$ eğrisinin uzunluğunu bulunuz.

b) $y = \ln(\sin x), \frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$ eğrisinin uzunluğunu bulunuz.

c) $y = \int_{-\frac{\pi}{2}}^x \sqrt{\cos t} dt, -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ eğrisinin uzunluğunu bulunuz.

30. $y = \frac{1}{x}$ eğrisi, x -ekseni ile $x = 1$ doğrusunun sağında belirlenen bölgenin

- a) alanını b) x -ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmini c) y -ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmini (varsa) bulunuz.

31. Aşağıdaki integralleri bulunuz.

- a) $\int \frac{x}{1+x^4} dx$ b) $\int \frac{dx}{x^2+4x+6}$ c) $\int \frac{1}{\cos^4 x} dx$ d) $\int \sqrt{1-\sin x} dx$
e) $\int \frac{x}{1+x^4} dx$ f) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx$ g) $\int \sin 2x \cos x dx$ h) $\int \sin^2 x \cos^5 x dx$
i) $\int \cos^2 x \sin^4 x dx$ i) $\int \tan^4 x dx$

32. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

- a) $\int \frac{dx}{2-\sin^2 x}$ a) $\int \frac{dx}{\sin^8 x}$ ($x = \arctan u$ değişken değişimlerini kullanabilirsiniz.)

33. Aşağıdaki integralleri bulunuz.

- a) $\int \frac{dx}{\sin x + \tan x}$ b) $\int \frac{dx}{\cos^2 - \sin^3 x}$ c) $\int x^3 \sqrt{4-x^2} dx$ d) $\int \sqrt{9-x^2}$
e) $\int \frac{dx}{x\sqrt{9+x^2}}$ f) $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x} dx$ g) $\int \frac{dx}{x\sqrt{9-x^2}}$ h) $\int \frac{\sqrt{x-1}-2}{\sqrt[3]{x-1}+1} dx$
i) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx$ i) $\int_0^{\pi} \sqrt{1+\sin^2 x} dx$ j) $\int \frac{dx}{3 \sin x + 2 \cos x + 2}$

34. Aşağıdaki integralleri bulunuz.

- a) $\int \frac{x+1}{\sqrt{4-x^2}} dx$ b) $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^3+9}}$ c) $\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt[3]{x+1}} dx$ d) $\int \frac{1+\sin x}{\cos x(1+\cos x)} dx$
e) $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+2x+3}}$ f) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-3x+1}}$ g) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx$ h) $\int \sqrt{\frac{\sin x}{\cos^5 x}} dx$
i) $\int \ln(x+x^2) dx$ i) $\int_0^{\pi} \frac{2x+3}{2x^3-8x} dx$ j) $\int \left(\frac{x-1}{x+2}\right)^2 dx$

35. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

- a) $\int_2^8 \frac{x^3-1}{x-1} dx$ b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \sin x dx$ c) $\int_0^{e-1} \ln(x+1) dx$ d) $\int \frac{x^{11}}{(x^8+1)^2} dx$
e) $\int \frac{x^3-1}{4x^3-x} dx$ f) $\int \frac{x+1}{\sqrt{2x-x^2}} dx$ g) $\lim_{a \rightarrow 1^+} \int_a^3 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x-3}}$
-

36. Aşağıda verilen kapalı fonksiyonlar için $y' = ?$

(a) $y - x = xy^3 - 3x^2y$

(b) $e^{x+2y} = y + x$

(c) $x \sin(xy) + \cos(xy) = 0$

(d) $x\sqrt{x+y} = 2xy^2$

(e) $\tan(x+y) = y^2$

37. $x^2 = \sin(xy) + xy - \frac{1}{2}$ ise $y'|_{(\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{\pi}{2}})} = ?$, ve $y''|_{(\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{\pi}{2}})} = ?$

38. $e^{xy} + y^2 \sin(\pi x) - e = 0$ eğrisinin $P(1, 1)$ noktasındaki teğetin ve normalinin denklemini yazınız.

39. $f(x) = x^3 + x + 1$ olsun.

(a) $f(x)$ in birebir olduğunu gösteriniz.

(b) $g = f^{-1}$ ise $g'(3) = ?$

40. Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini bulunuz.

(a) $\ln\left(\frac{x+1}{\sqrt{x-2}}\right)$

(b) $\log_{10}\left(\frac{x}{x-1}\right)$

(c) $\ln\left(\sqrt{\frac{3x+2}{3x-2}}\right)$

41. Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini logaritmik türev yardımıyla bulunuz.

(a) $y = (1+x)^{2/3}(2-x)^{1/3}(1+\ln x)^{1/2}$

(b) $y = x^{\sqrt{x+1}}$

(c) $y = \sqrt[4]{\frac{x^2+1}{x^2-1}}$

42. Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini bulunuz.

(a) $\sin(\arctan(x+1))$

(b) $\arcsin(\sin(\sqrt{x^2+3}))$

(c) $x \arctan(\sqrt{x})$

43. Bir çemberin yarıçapı 2 cm/s sabit hızla büyüyor. Çevre uzunluğu 200π cm olduğunda, çemberin alanındaki değişim hızı nedir?

44. İki araba aynı noktadan aynı anda hareket ediyor. Biri 60 km/sa hızla güneye, diğeri 20 km/sa hızla batıya doğru gidiyor. 2 saat sonra arabalar arasındaki uzaklığın artış hızı ne olur?

45. $x \sin y + y^2 + 3y - x^2 + 3x = 2$ olarak verilen eğrinin, $(1,0)$ noktasındaki doğrusal yaklaşımını (doğrusallaşmasını, yani $L(x)$) bulunuz.

46. Aşağıdaki fonksiyonlar için dy diferansiyelini bulunuz

(a) $y = \sin^2(4x)$

(b) $y = \frac{x}{x-1}$

(c) $y = \ln(\tan(2x))$

47. $f(x) = \frac{1}{x-1}$ olsun.

(a) $f(x)$ in $x = 3$ noktasındaki doğrusal yaklaşımını ($L(x)$) bulunuz.

(b) $L(x)$ kullanılarak $(3-h, 3+h)$ aralığında $f(x)$ yaklaşık olarak hesaplanırsa, hatanın 0.001 den küçük olması için h en fazla kaç olabilir.

(c) dx ve dy diferansiyellerini kullanarak $f(3.02)$ yi bulunuz.

48. Aşağıdaki fonksiyonların yerel maksimum/minimum değerlerini bulunuz

(a) $f(x) = 3x^4 - 4x^3$

- (b) $f(x) = x - 2\sqrt{x}$
(c) $f(x) = |x^2 - 1|$
(d) $f(x) = \sin x + \cos x, x \in [0, \frac{\pi}{3}]$
(e) $f(x) = xe^{-x}, x \in [1, 3]$

49. Aşağıdaki fonksiyonlar için verilen aralıklarda ortalama değer teoremini sağlayan c noktasını bulunuz.

- (a) $f(x) = x^2 + x, x \in [0, 1]$
(b) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2, x \in [0, 3]$

50. Ortalama değer teoremini kullanarak aşağıdaki fonksiyonların sadece bir reel kökü olduğunu gösteriniz.

- (a) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 6x - 2$
(b) $f(x) = x^3 + 2x - \frac{2}{\pi} \cos(\frac{\pi x}{2})$

51. Aşağıdaki fonksiyonların artan/azalan olduğu aralıkları bulunuz.

- (a) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 6x - 2$
(b) $f(x) = x^2(x - 1)$
(c) $f(x) = |x^2 - 4|$
(d) $f(x) = \sin x, x \in [-2\pi, 2\pi]$
(e) $f(x) = 2 \cos x + \sin^2 x, x \in [-\pi, \pi]$
(f) $f(x) = \ln(1 + x^2)$

52. $f(x)$ fonksiyonu ve onun türevleri hakkında aşağıdaki bilgiler veriliyor:

$$f'(-3) = f'(0) = f'(3) = 0, f''(-\sqrt{3}) = f''(\sqrt{3}) = 0,$$

$$f'(x) < 0, \text{ eğer } -3 < x < 0 \text{ ve } x > 3; f'(x) > 0, \text{ eğer } x < 3 \text{ ve } 0 < x < 3,$$

$$f''(x) < 0, \text{ eğer } x < -\sqrt{3} \text{ ve } x > \sqrt{3}; f''(x) > 0, \text{ eğer } -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}.$$

- (a) $f(x)$ fonksiyonunun kritik ve büküm noktalarını bularak, onları nasıl bulduğunuzu açıklayınız ve analiz ediniz.
(b) $f(x)$ fonksiyonunun artan ve azalan olduğu aralıkları belirleyiniz ve nedenlerini açıklayınız.
(c) $f(x)$ fonksiyonunun dışbükey ve içbükey olduğu aralıkları belirleyiniz ve nedenlerini açıklayınız.
(d) $f(x)$ fonksiyonunun yerel (local) ekstrem (maksimum/minimum) değerlerini bulunuz ve cevabınızı açıklayınız.

53. Aşağıdaki fonksiyonların grafiklerini birinci ve ikinci türevlerini kullanarak çiziniz. (Fonksiyonların tanım kümelerini, artan/azalan oldukları aralıkları, maksimum/minimum değerlerini, içbükey/dışbükey oldukları aralıkları, büküm noktalarını ve (eğer varsa) asimptotlarını belirtiniz.)

- (a) $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$
(b) $f(x) = \frac{1}{x+1} - 1$
(c) $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$
(d) $f(x) = x \ln x$
(e) $f(x) = x^2 e^{-x}$
(f) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 2}$

54. Çarpımları 12, toplamları maksimum olan iki pozitif tamsayı bulunuz.

55. Alanı $1000 m^2$ olan dikdörtgenler içinde, çevre uzunluğu en küçük olanının boyutlarını bulunuz.

56. $12000 cm^2$ lik bir malzemeden tabanı kare, üstü açık bir kutu yapılmak istenirse, en büyük hacimli kutunun boyutları ne olur?

57. $x^2 + 4y^2 = 36$ elipsi içine çizilen ve alanı en büyük olan dikdörtgenin boyutlarını bulunuz.

58. Aşağıdaki limitleri bulunuz.

- (a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + 2x - 4}{x - 1}$
 (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(2x)}{12x^2}$
 (c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$
 (d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 2x - 4}{3x^2 - 1}$
 (e) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{x+1}{x} \right)$
 (f) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{1+x^2}$
 (g) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{\ln x}$
 (h) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/\ln x}$
 (i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3}{9x^2}$

59. Aşağıdaki fonksiyonların anti-türevlerini bulunuz.

- (a) $\frac{3}{2}\sqrt{x}$
 (b) e^{3x}
 (c) $-\pi \sin(\pi x)$

60. $\sum_{k=1}^n 6k^2 - 4k + 3 = ?$

61. $\sum_{k=1}^7 k(2k+1) = ?$

62. A , $x = -1$ den $x = 2$ ye kadar $f(x) = 1 + x^2$ eğrisinin altında kalan alan olsun.

- (a) Üç dikdörtgen ve sağ uç noktaları kullanarak A yı yaklaşık olarak bulunuz. Altı dikdörtgen kullanarak sonucu iyileştiriniz.
 (b) (a) şikkında yaptıklarımızı sol uç noktaları kullanarak yapınız.
 (c) (a) şikkında yaptıklarımızı orta noktaları kullanarak yapınız.

63. Aşağıdaki belirli integralleri hesaplayınız.

- (a) $\int_{1/2}^{3/2} (-2x + 4)dx$
 (b) $\int_{-1}^1 (1 + \sqrt{1-x^2})dx$
 (c) $\int_0^{10} x^2$
 (d) $\int_0^2 (3x^2 + x - 5)dx$
 (e) $\int_0^{\sqrt{2}} (x - \sqrt{2})dx$