

Mat 102 - Matematik II / Calculus II

Çalışma Soruları

Çok Değişkenli Fonksiyonlar:

Çok Katlı İntegraller ve Uygulamaları

1) Aşağıdaki iki katlı integralleri hesaplayınız.

a) $\int_0^1 \int_{x^2}^x xy^2 dy dx$ ($\frac{1}{40}$)

b) $\int_3^4 \int_1^{x^2} \frac{1}{(x+y)^2} dx dy$ ($\ln \frac{25}{24}$)

c) $\int_{-1}^2 \int_{-y}^{y+2} x + 2y^2 dx dy$ (36)

d) $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2} dy dx$ ($\frac{\pi}{6}$)

e) $R = \{(x, y); |x| + |y| \leq 1\} \rightarrow \iint_R x^3 y^5 dx dy = ?$ (0)

2) x -ekseni, $x = 1$ doğrusu ve $y = x$ doğrusu ile sınırlı bölge R olduğuna göre $\iint_R e^{-x^2} dA$ integralini hesaplayınız. Cevap $\frac{e-1}{2e}$

3) x -ekseni, $x = 1$ doğrusu ve $y = x^2$ parabolü ile sınırlı bölge R dir. $x + y - z = 0$ düzleminin altında ve R bölgesinin üzerindeki hacmi bulunuz. Cevap $\frac{7}{20}$ birim küp

4) $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ katı küresinden $x^2 + y^2 = ax$ ($a > 0$) dairesel silindiri ile kesilen bölgenin hacmini bulunuz. (ipucu: kutupsal koordinatlar kullanınız.) Cevap $\frac{4}{3} a^2 (\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3})$ birim küp

5) a) R bölgesi; $x = 2, y = x$ doğruları ve $xy = 1$ hiperbolü ile sınırlı bölge ise $\iint_R \frac{x^2}{y^2} dA$ integralini hesaplayınız. ($\frac{-9}{4}$)

b) R bölgesi; $y = x^2$ ve $x = y^2$ eğrileri ile sınırlı bölge ise $\iint_R (x^2 + y) dA = ?$ ($\frac{133}{140}$)

c) R bölgesi; koordinat eksenleri ve $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ parabolü ile sınırlı bölge ise $\iint_R xy dA = ?$ ($\frac{1}{280}$)

d) R bölgesi; x eksen ve $0 \leq x \leq \pi$ olmak üzere $y = \sin x$ eğrisi ile sınırlı bölge ise $\iint_R x dA = ?$ (π)

e) R bölgesi; köşeleri $(0, 0), (1, 1)$ ve $(-2, 1)$ olan üçgen bölgesi ise $\iint_R (1 - x) dA = ?$ (2)

6) Aşağıdaki integrallerin sırasını değiştiriniz.

a) $\int_0^1 \int_{-2y}^{2y} f(x, y) dx dy$

- b) $\int_1^2 \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y) dy dx$
c) $\int_1^e \int_0^{\ln x} f(x,y) dy dx$
d) $\int_0^1 \int_{\frac{x^2}{9}}^x f(x,y) dy dx + \int_1^3 \int_{\frac{x^2}{9}}^1 f(x,y) dy dx$

7) Kutupsal koordinatları kullanarak aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

- a) $\iint_R (x^2 + y^2) dA$; $R = \{(x,y); x^2 + (y+2)^2 \leq 4\}$ (24π)
b) $\iint_R \arctan \frac{y}{x} dA$; $R = \{(x,y); x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$ ($\frac{\pi^2}{16}$)
c) $\iint_R \sin(x^2 + y^2) dA$; $R = \{(x,y); \pi^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\pi\}$ ($-6\pi^2$)

8) $I = \int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 e^{y^3} dy dx$ tekrarlı integralinin sırasını değiştirerek hesap ediniz. Cevap: $\frac{e-1}{3}$

9) Aşağıdaki bölgelerin alanlarını çift katlı integral kullanarak hesaplayınız.

- a) Alttan R bölgesi ($R : y = x^2$ ve $y = 1$ ile sınırlı) nın ve üstten $z = 4 - x - y$ eğrisini sınırladığı cismin hacmini bulunuz. ($\frac{68}{15}$)
b) R bölgesi $xy = 1, y = x$ ve $x = e$ doğrularının sınırladığı sınırlı bölge ($\frac{3}{2}$)
c) R bölgesi; $x = y^2$ ve $x = 4 - 3y^2$ eğrilerinin sınırladığı bölge ($\frac{16}{3}$)
d) $x^2 + 2y^2 = 1$ ve $2x^2 + y^2 = 1$ elipslerinin sınırladığı bölge ($\sqrt{2} \arcsin \frac{2\sqrt{2}}{3}$)
e) $x^2 + y^2 = 4$ ve $y^2 - 2x^2 = 1$ eğrilerinin sınırladığı bölge ($\sqrt{2} \ln(\sqrt{2} + \sqrt{3})$)

10) R , düzlemin birinci bölgesinde $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, \frac{x}{\sqrt{3}} \leq y \leq \sqrt{3}x$ eşitsizlikleri ile tanımlanıyor.

$I = \iint_R \arctan \left(\frac{y}{x} \right) dx dy$ iki katlı integralini kartezyen koordinatlardan kutupsal koordinatlara dönüştürerek hesap ediniz. Cevap: $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \int_1^2 \theta r dr d\theta = \frac{\pi^2}{16}$

11) Kutupsal koordinatlar kullanarak $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ konisinin üstünde ve $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ küresinin altında kalan cismin hacmini bulunuz. Cevap: $\frac{2\pi}{3} (1 - \frac{1}{\sqrt{2}})$ birim küp

12) İki katlı interal kullanarak aşağıda verilen cisimlerin hacimlerini bulunuz.

- a) S cismi; koordinat düzlemleri, $x = 1$ ve $y = 2$ düzlemleri ile $z = x + 2y + 1$ düzleminin sınırladığı cisim, (7)
b) Koordinat düzlemleri ile $x + 2y = 2$ ve $x + 4y + 2z = 8$ düzlemlerinin 1. kuadrantta sınırladığı cisim, ($\frac{23}{3}$)
c) $x = 0, z = 0, x + 3y = 6, 2x + 3z = 12$ ve $x + y + z = 6$ düzleminin sınırladığı cisim, (12)
d) $x^2 + y^2 = 1$ dik silindiri ile $z = 0$ ve $2x + 2y + 3z = 6$ düzleminin sınırladığı cisim, ($\frac{1}{3}$)

13) $I = \int_0^\pi \int_x^\pi \frac{\sin y}{y} dy dx$ tekrarlı integrali D bölgesi üzerinde iki katlı integrale karşılık gelmektedir. D bölgesini çizdikten sonra integralin sırasını değiştirin ve integrali hesaplayın.

Cevap: 2

14) $\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 \frac{y}{\sqrt{4+x^5}} dx dy = ?$ ($dydx$ e çevrilirse sonuç $\frac{4}{5}$ bulunur.)

15) $R = \{(x, y) : (x^2 + y^2)^2 \leq x^2 - y^2, 0 \leq x\}$ olmak üzere $\iint_R (1 + x^2 + y^2) dx dy = ?$ ($(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta) \rightarrow$ sonuç $\frac{1}{2} + \frac{\pi}{16}$)

16) $R = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, y \leq 2x\}$ (veya $x^2 + y^2 = 1$ çemberi içerisinde ve $y = 2x$ doğrusu altında kalan bölge) olmak üzere

$$\iint_R 2e^{\frac{-3}{5}x^3 + xy} dA = ?$$

(Cevap: $e^{\frac{-2}{3\sqrt{5}} - \frac{-2}{9\sqrt{5}}}$)

17) $C_1 : (x - 1)^2 + y^2 = 1$ ve $C_2 : (x - 2)^2 + y^2 = 1$ olarak tanımlanıyor. R, C_2 nin içinde ve C_1 in dışındaki noktaların kümesi olmak üzere

$$\iint_R y^2 dA$$

integralini

- $dx dy$ in integrali olarak
- $dy dx$ in integrali olarak
- Kutupsal koordinatlarda integral olarak ifade ediniz.

(Cevap:

a) $2 \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{2+\sqrt{1-y^2}} y^2 dx dy + 2 \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 \int_{2-\sqrt{1-y^2}}^{2+\sqrt{1-y^2}} y^2 dx dy$

b) $2 \int_{\frac{3}{2}}^2 \int_{\sqrt{1-(x-2)^2}}^{\sqrt{1-(x-1)^2}} y^2 dy dx + 2 \int_2^3 \int_0^{\sqrt{1-(x-2)^2}} y^2 dy dx$

c) $2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \int_{2 \cos \theta}^{2 \cos \theta + \sqrt{4 \cos^2 \theta - 3}} r^2 \sin^2 \theta r dr d\theta$

18) $f(x, y) = \frac{1 + \sin(x^2 + y)}{1 + x^2}$ olmak üzere $\int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\ln y} f(x, y) dx dy + \int_{2\pi}^{\infty} \int_{\ln(y-2\pi)}^{\ln y} f(x, y) dx dy$ değerini bulunuz. (Cevap: $2\pi^2$)

19) Aşağıdaki üç katlı integralleri hesaplayınız.

a) $\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \int_0^{\sqrt{9-x^2}} dz dx dy$ (18)

b) $\int_0^{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 x \cos y \sin z dx dy dz$ (3)

c) $\int_1^2 \int_0^{\ln z} \int_0^{\ln y} e^{x+y} dx dy dz$ $\left(2 \ln 2 - \frac{7}{4}\right)$

d) $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \frac{dz}{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}} dy dx$ $\left(\frac{\pi^2}{8}\right)$

$$\text{e) } \int_{-1}^1 \int_0^2 \int_0^{x+z} x^2 y z^2 dy dx dz \quad (0)$$

$$\text{f) } \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_r^{\frac{1}{\sqrt{2-r^2}}} 3dz r dr d\theta \quad (\pi(6\sqrt{2} - 8))$$

$$\text{g) } \int_0^2 \int_{\frac{\theta}{2\pi}}^{\pi} \int_0^{3+24r^2} dz r dr d\theta \quad \left(\frac{17\pi}{5}\right)$$

20) $z = 8 - x^2 - y^2$ ve $z = x^2 + y^2$ paraboloidleri tarafından sınırlanan bölgenin hacmini katlı integral ile hesaplayınız. (16π)