

Mat 102 - Matematik II / Calculus II

Çalışma Soruları

Çok Değişkenli Fonksiyonlar:

Türev, Gradyent ve Uygulamaları

1) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ fonksiyonunun $(0, 0)$ da sürekli ve kısmi türevlere sahip olduğunu gösteriniz.

2) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ fonksiyonunun $P = (3, 4)$ noktasındaki $L(x, y)$ lineerleştirmesini yazınız ve bundan faydalanarak $\sqrt{(2, 98)^2 + (4.03)^2}$ sayısının yaklaşık değerini bulunuz.

CEVAP: 5.012

3) Teğet düzlemi yaklaşımını (doğrusal yaklaşım) kullanarak $e^{0.1} \ln(0.9)$ değerini yaklaşık olarak hesaplayınız. (-0.1)

4) $z = f(x, y)$ fonksiyonu için $f(1, 2) = 3$, $f_x(1, 2) = 2$ ve $f_y(1, 2) = 5$ olduğu biliniyor. $f(1.1, 1.8)$ in değerini yaklaşık olarak bulunuz. $(f(1.1, 1.8) \approx 2.2)$

5) $f(x, y, z) = \frac{xy^2}{1 + z^2}$ ise, $f(1.01, 1.98, 2.03)$ ün yaklaşık değerini bulunuz. (0.7728)

6) Aşağıdakilerin yaklaşık değerini hesaplayınız.

(a) $\sin(31^\circ) \cdot \cos(58^\circ)$

(b) $(1.002)(2.003)^2(3.004)^3$

7) $\frac{1}{z} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ eşitliği veriliyor. Başlangıç durumunda $x = 100$ ve $y = 25$ tir. x , 30 artar ve y , 5 azalırsa z 'deki değişikliği yaklaşık olarak hesaplayınız. (Diferansiyel yardımıyla çözebilirsiniz)
 $\left(\frac{1}{z^2} dz = \frac{1}{x^2} dx + \frac{1}{y^2} dy \Rightarrow dz = -2 \right)$

8) $f(x, y) = 3x^2y + y^3 - 108y$ fonksiyonunun maksimum, minimum ve eyer noktalarını bulunuz. $((\pm 6, 0)$ eyer noktası, $(0, 6)$ yerel min. , $(0, -6)$ yerel maks.)

9) $f(x, y) = xy(3 - x - y)$ fonksiyonunun kritik noktalarını bulunuz ve bu kritik noktalarda yerel maksimum ve minimum değerleri alıp almadığını belirleyiniz.

CEVAP:Kritik noktalar $(0, 0)(3, 0), (0, 3)$ ve $(1, 1)$. Eyer(semer) noktaları $(0, 0), (3, 0), (0, 3)$.
 $f(1, 1) = 1$ yerel max. değeri.

10) Aşağıdaki fonksiyonların tüm kritik noktalarını bulup sınıflandırınız.

- (a) $f(x, y) = x\sqrt{y} - x^2 + 9x - y$ ($y > 0$) ((6, 9) noktası yerel maks.)
- (b) $g(x, y) = (x - 1)\ln(xy)$ ((1, 1) noktası bir semer noktası)
- 11) $f(x, y) = (y - x^2)(y - 3x^2)$ fonksiyonun ekstremum değerlerini bulunuz. ((0, 0) eyer noktası)
- 12) $D = \{(x, y) : x \in [0, 3]\}$ ile tanımlanıyor. Her $(x, y) \in D$ için $\frac{x^2 + y^2}{4} \leq e^{x+y-2}$ olduğunu gösteriniz. ($f(x, y) = \frac{(x^2 + y^2)e^{-x-y+2}}{4}$ fonksiyonunun maksimum değeri bulunarak gösterilebilir.)
- 13) (a) $f(x, y) = x^2y - 6y^2 - 3x^2$ nin tüm kritik noktalarını bulup sınıflandırınız.
- (b) Kenarları koordinat eksenlerine paralel olan ve $36x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 36$ elipsoidi içine yerleştirilebilen maksimum hacimli dikdörtgensel kutunun boyutlarını bulunuz ve maksimum hacmini bulunuz. $\left(\frac{16\sqrt{3}}{3}\right)$
- (c) $f(x, y) = xy$ nin $x^2 + y^2 = 1$ çemberi üzerindeki en büyük ve en küçük değerlerini bulmak için Lagrange çarpanları yöntemini kullanınız.
- (d) $f(x, y) = 2xy + y^2 + 8x - 4y$ fonksiyonunun $1 \leq x \leq 2$ ile $-1 \leq y \leq 1$ in belirlediği R bölgesi üzerindeki en büyük ve en küçük değerini bulunuz.
- 14) Sınav notları $g(x, y, z) = 10f(x, y, z)$ fonksiyonu ile hesaplınsın. (x, y, z) , $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ şartını sağlamak üzere $f(x, y, z) = x^2 + 2z^2 - (y - 6)^2 - 16$ olarak tanımlı ise hangi (x, y, z) değerine karşılık gelen notu almak istersin? ((0, 2, $\sqrt{21}$) veya (0, 2, $-\sqrt{21}$) $\Rightarrow g = 100$)
- 15) $f(x, y) = -4x^3 - xy^2 + 2x^2y + x$ fonksiyonunun maksimum, minimum ve eyer noktalarını bulunuz. ((0, ± 1) eyer noktası, $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ yerel maks. , $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ yerel min.)
- 16) Aşağıdaki fonksiyonların verilen bölgeler üzerindeki mutlak ekstremumlarını bulunuz.
- (a) $f(x, y) = x^2 - y^2$, $R = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$ (maks: $(\pm 2, 0)$, min: $(0, \pm 2)$)
- (b) $f(x, y) = 2xy + y^2 + 8x - 4y$, $R = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$ (maks : $(2, 1) \Rightarrow 17$, min : $(0, 1) \Rightarrow -3$)
- 17) $f(x, y) = 4x^3 + y^2 - 2x^2y + 102$ fonksiyonunun ekstremum değerlerini bulunuz. ((3, 9) eyer noktası, (0, 0) eyer noktası)
- 18) $f(x, y, z) = xyz$ fonksiyonunun $x + 2y + z = 2$ şartı altındaki maksimum değeri nedir? ($x = \frac{2}{3}, y = \frac{1}{3} \Rightarrow v = \frac{4}{27}$ maks.)
- 19) $f(x, y) = 16 - x^2 - 4y^2$ fonksiyonunun $x^4 + 2y^4 \leq 1$ bölgesindeki ekstremum değerlerini bulunuz. ((0, 0), $(0, \pm \frac{1}{\sqrt{2}})$, $(\pm 1, 0)$, $(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \sqrt{\frac{2}{3}})$ \Rightarrow maks: $f(0, 0) = 16$, min: $f(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \sqrt{\frac{2}{3}}) = 13$)
- 20) $f(x, y) = 6xy^2 - 2x^3 - 3y^4$ fonksiyonunun ekstremum değerlerini bulunuz. ((0, 0) eyer noktası, (1, 1), (1, -1) yerel maksimum)

21) $17x^2 + 12xy + 8y^2 = 100$ eğrisi (bir elips) üzerinde orijine en yakın ve en uzak noktaları bulunuz.

CEVAP:(2, 1) ve $(-2, -1)$ orijine en yakın noktalar
 $(2, -4)$ ve $(-2, 4)$ orijine en uzak noktalar

22) $f(x, y) = 2xy$ fonksiyonunun $D : x^2 + y^2 \leq 4$ kapalı diski üzerindeki maksimum ve minimum değerlerini bulunuz.

CEVAP: $f(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 4$ maksimum, $f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = -4$ minimum
 $f(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = 4$ maksimum, $f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = -4$ minimum

23) Yüzey alanı 600 cm^2 olan maksimum hacimli dikdörtgen biçimindeki bir kutunun boyutlarını bulunuz. (uzunluk 10 cm , maks. hacim 1000 cm^3)

24) Lagrange çarpanları metodunu kullanarak, $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ elipsi üzerinde, $P(-1, 0)$ noktasına en uzak olan noktaları bulunuz.

$(\frac{1}{3}, \frac{4\sqrt{2}}{3})$ ve $(\frac{1}{3}, -\frac{4\sqrt{2}}{3})$

25) Lagrange çarpanları yöntemini kullanarak aşağıdaki fonksiyonların yanlarında verilen kısıtlanmış eğri üzerindeki ekstremumlarını bulunuz.

(a) $f(x, y) = x^2 + 8y^2$, $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ (maks. değer 8 ve $(0, 1)$ noktasında olur. min. değer $\frac{8}{27}$ ve $(\frac{4}{9}, \frac{1}{9})$ noktasında olur.)

(b) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, $x - 2y + 2z = 6$ (maks. değer yok. min değer 4 ve $(\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{4}{3})$ noktasında olur.)

(c) $x^2 - y^2 = 1$ hiperbolü üzerinden $(0, 4)$ noktasına olan en yakın noktanın koordinatlarını bulunuz. $(\pm\sqrt{5}, 2)$ ve min. uzaklık 3 tür.)