TOBB EKONOMİ VE TEKNOLOJİ ÜNİVERSİTESİ

TOBB-ETÜ, MATEMATİK BÖLÜMÜ, 2014-2015 BAHAR DÖNEMİ
MAT 101, MATEMATİK I, FİNAL SINAVI
2 NİSAN 2015

Adı Soyadı: No: İMZA:

1. (*10+10 p.*)	**2.** (*15 p.*)	**3.** (*15 p.*)	**4.** (*15 p.*)	**5.** (*15 p.*)	**6.** (*20 p.*)	**TOPLAM**

NOT: Tam puan almak için yeterli açıklama yapılması gerekmektedir. Sınav süresi 100 dakikadır. Başarılar.

1) Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x\sin x} = ?$

Çözüm: I.yol

İki kez L'Hôpital kuralını uygularsak

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sin x + x\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{\cos x+\cos x - x\sin x} = \frac{1}{1+1-0} = \frac{1}{2}$$

bulunur.

II.yol

Yarım açı formülü yardımı ile

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2x\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{x\cos\frac{x}{2}} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\lim_{x\to 0}\frac{1}{2\cos\frac{x}{2}} = 1\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

bulunur.

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x-\sin x}{3x+\sin x} = ?$

Çözüm: Pay ve paydayı x ile bölersek:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x-\sin x}{3x+\sin x} = \lim_{x\to\infty}\frac{5-\frac{\sin x}{x}}{3+\frac{\sin x}{x}} = \frac{5}{3}$$

bulunur.

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-1}{|x|} \le \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x} \le \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{|x|}$ olup, sıkıştırma teoreminden $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x} = 0$ dır

2) $\displaystyle\int \frac{7x+3}{x-x^3}dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: $\displaystyle\frac{7x+3}{x-x^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-1} = \frac{(A+B+C)x^2+(-B+C)x-A}{x^3-x}$ şeklinde basit kesirlere ayırırsak

$\begin{cases} A+B+C=0 \\ B-C=7 \\ A=3 \end{cases}$ denklemini elde ederiz. Buradan da $A=3, B=2, C=-5$ bulunur. O halde integral

$I = \displaystyle\int \frac{3}{x}dx + \int \frac{2}{x+1}dx - \int \frac{5}{x-1}dx = 3\ln x + 2\ln(x+1) - 5\ln(x-1) + sabit$ bulunur.

3) $\displaystyle\int x^3\sin(x^2)dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: $u = x^2$ değişken değiştirmesini yapalım. O halde $du = 2xdx$ olup integralimiz:

$I = \displaystyle\int x^2\sin(x^2)\,xdx = \frac{1}{2}\int u\sin u\,du$ halini alır. Şimdi $u = a$, $\sin u\,du = db$ alarak kısmi integrasyon yaparsak: $du = da, b = -\cos u$ olup

$I = \displaystyle\frac{1}{2}\left(ab - \int b\,da\right) = \frac{1}{2}\left(-u\cos u + \int \cos u du\right) = \frac{1}{2}\left(-u\cos u + \sin u\right) + sabit$

$= \displaystyle\frac{1}{2}\left(-x^2\cos(x^2) + \sin(x^2)\right) + sabit$ bulunur.

4) $\displaystyle\int \frac{x}{1-x^2+\sqrt{1-x^2}}dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: $u=\sqrt{1-x^2}$ değişken değiştirmesini yaparsak $u^2=1-x^2$ ve $-2u\,du=2x\,dx$ olup integralimiz:

$$I=\int\frac{-udu}{u^2+u}=\int\frac{-u}{u(u+1)}du=-\int\frac{1}{u+1}du=-\ln(u+1)=-\ln(\sqrt{1-x^2}+1)+sabit \text{ bulunur.}$$

5) Bir fabrikada üretilecek bir çeşit ürün miktarı x olduğunda, $x>1$ olmak üzere, toplam maliyet $y=\dfrac{x}{50}+\dfrac{200}{x-1}$ oluyor. Maliyetin minimum olması için bu üründen ne kadar üretilmelidir? (Nedenini açıklayınız.)

Çözüm: Maliyet fonksiyonunun 1. ve 2. türevleri:

$y'=\dfrac{1}{50}-\dfrac{200}{(x-1)^2}$ ve $y''=\dfrac{400}{(x-1)^3}$ bulunur. Kritik noktaları bulmak için $y'=0$ yapan noktaları ele alalım:

$\dfrac{1}{50}=\dfrac{200}{(x-1)^2}$ veya $(x-1)^2=10000$ olup $x=-99$ ve $x=101$ bulunur. İlk çözüm negatif olduğundan tek kritik nokta $x=101$ dir.

Bulunan kritik noktanın ikinci türevdeki değerine bakarsak $y''(101)=\dfrac{400}{1000000}>0$ olup bu nokta minimum noktasını verir.

Not: ikinci türev testi yerine 1.türev tablosu incelenebilir.

6) $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$ fonksiyonunun tanım kümesini, artan/azalan olduğu aralıkları, eğer varsa asimtotlarını, maksimum/minimum noktalarını ve bükeyliğini birinci ve ikinci türev yardımıyla inceleyerek grafiğini çiziniz.

Çözüm: $\star$ Tanım kümesi $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ dır.

- $\star$ Asimtotları: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{1} = \infty$ ve eksi sonsuza giderken $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x}{x} = 0$ olup $y = 0$ doğrusu yatay asimtottur.

  $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ ve $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{e^x}{x} = -\infty$ olup $x = 0$ doğrusu dikey asimtottur. Eğik asimtot yoktur.

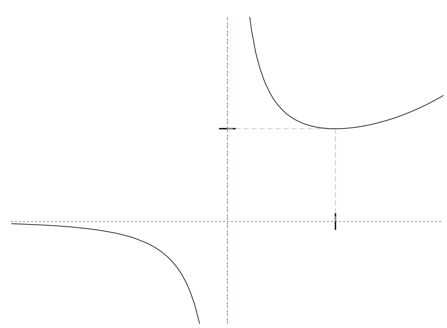
- $\star$ 1.türevi $y' = \dfrac{xe^x - e^x}{x^2} = \dfrac{(x-1)e^x}{x^2}$ olup tabloda incelenmesi gereken noktalar $x = 0$ ve $x = 1$ dir. Değer vererek bakarsak y' in işareti $(-\infty, 0), (0, 1)$ aralıklarında negatif ve $(1, \infty)$ aralığında da pozitif olup fonksiyonun $(-\infty, 0), (0, 1)$ aralıklarında azalan ve $(1, \infty)$ aralığında da artan olduğu sonucuna varırız.

- $\star$ Artan/azalan aralıklara bakarak $x = 1$ noktasının yerel minimum olduğu sonucuna varırız. Mutlak ekstremum noktaları yoktur çünkü dikey asimtotum solunda $-\infty$ ve sağında ∞ değerleri alır.

- $\star$ 2.türevi ise $y'' = \dfrac{e^x(x^2 - 2x + 2)}{x^3}$ olup tabloda incelenecek tek değer $x = 0$ noktasıdır. Çünkü payın diskriminantı negatif olup payı sıfırlayan nokta yoktur.

  $x = 0$ noktasının etrafında y'' in işaretine bakarsak $(-\infty, 0)$ aralığında negatif ve $(0, \infty)$ aralığında pozitif olup, fonksiyon $(-\infty, 0)$ aralığında aşağı bükey ve $(0, \infty)$ aralığında ise yukarı bükeydir. Ancak bükeylik noktası yoktur, sebebi $x = 0$ noktası tanım kümesinde değildir.

- $\star$ Şeklimiz aşağıdaki gibidir:



Şekil 1: $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$ in grafiği

Yatay ve dikey asimtotlar absis ve ordinat eksenleridir. İşaretlenen $(1, e)$ noktası ise yerel minimum noktasıdır.